



Ecuaciones cuadráticas

Resolver la siguiente situación problemática



Supongamos que un jugador de fútbol patea un tiro libre de modo que la trayectoria de la pelota mientras se encuentra en el aire está dada por:

$$y = -0,05x^2 + 0,7x$$

donde y es la altura en metros de la pelota cuando ésta se encuentra a x metros de la distancia horizontal desde el punto en que fue lanzada.

¿Cuál es el alcance del tiro libre, es decir, a qué distancia tocará el suelo la pelota?

.....

.....

.....

.....

Llamamos *ecuaciones cuadráticas* o *ecuaciones de segundo* grado a las ecuaciones que pueden expresarse de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

Consideraremos los siguientes casos:

a) *Si el término lineal es nulo*

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $-3x^2 + \frac{1}{3} = 0$

.....

.....

b) *Si el término independiente es nulo*

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $8x^2 + 2x = 0$

.....

.....



c) Si la ecuación es completa

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$

Como podemos ver, en este caso no podemos despejar x ni sacar factor común. Por lo tanto, para poder resolver la ecuación planteada vamos a completar el siguiente procedimiento:

- Pasamos el término independiente al otro miembro.

.....

- Sumamos 1 a ambos miembros de la igualdad.

.....

- ¿Cómo podemos expresar el primer miembro de la igualdad anterior?

.....

- Para poder despejar la variable x , aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros.

.....

- Planteamos las dos posibilidades.

.....

.....

El procedimiento utilizado se lo llama “completar cuadrados”. Si aplicamos un procedimiento similar a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, obtendremos una fórmula para hallar las raíces x_1 y x_2 . La llamamos **fórmula resolvente** y la utilizaremos cuando necesitemos resolver una **ecuación cuadrática completa**.

Fórmula resolvente

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) pueden obtenerse reemplazando los coeficientes **a**, **b** y **c** en las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$



Para abreviar, las reunimos en una sola fórmula:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Ejemplo 4: Resolver al ecuación $3x^2 - 2x - 1 = 0$ aplicando al fórmula resolvente.

En primer lugar, identificamos los coeficientes:

$$a = \dots\dots\dots \quad b = \dots\dots\dots \quad c = \dots\dots\dots$$

Reemplazamos en la fórmula resolvente:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{\dots\dots\dots \pm \sqrt{\dots\dots\dots}}{2 \cdot \dots\dots\dots}$$
$$x_1, x_2 = \frac{\dots\dots\dots \pm \sqrt{\dots\dots\dots}}{2 \cdot \dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$
$$x_1 = \frac{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \quad x_2 = \frac{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

Resolver las siguientes ecuaciones

1) $\frac{1}{5} \cdot (x+2)^2 - \frac{(x+3) \cdot (x-3)}{4} = \frac{(x+3)^2}{2} - \frac{11}{5}x - \frac{51}{20}$ R: $\pm\sqrt{2}$

2) $(x+1) \cdot (x-1) - \frac{6-5x}{3} = (x+2)^2$ R: -3

3) $\frac{5x-8}{x-1} = \frac{7x-4}{x+2}$ R: $\frac{5}{2}, 4$

4) $(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$ R: $0, -\frac{26}{3}$

5) $-4 \cdot \left(2x - \frac{1}{4}\right) + (x+4)^2 = 2 \cdot (7+x) \cdot (x-7) + 34$ R: ± 9

6) $\frac{(x+3)^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{x-1}{3} = \frac{(x+1)(x+3)}{6} - \frac{1}{3} + \frac{11}{3}x$ R: no tiene solución real

7) $(x-1)^2 = \frac{1}{2} \cdot (3x+2)$ R: $0, \frac{7}{2}$

8) $\frac{1}{2}(x^2 - 3x) + \frac{x \cdot (x-2)}{4} = \frac{1}{8} \cdot (3x-2)^2 - 1$ R: $-2, \frac{2}{3}$

9) $\frac{(x+2)^2}{5} - \frac{x^2-9}{4} = \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{1}{5}$ R: -3, -1

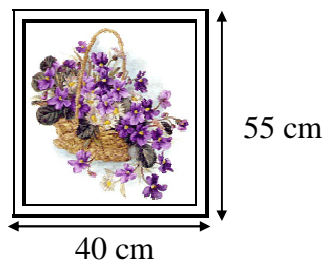
10) $(x-4)^2 - \left(\frac{7x-3}{-2}\right) = (x+5) \cdot (x-5) + 1$ R: $\frac{77}{9}$

11) $\frac{x+3}{3} - \frac{2}{x-4} = \frac{x}{6} + \frac{x-2}{4}$ R: 6, 16

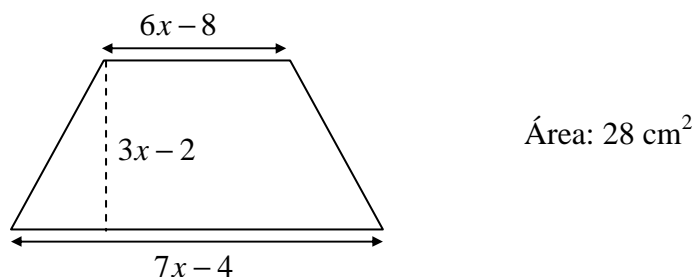
12) $\frac{1}{3}(x-2)^2 - \frac{(x+1) \cdot (x-5)}{2} = 1 + \frac{x-1}{2}$ R: -4, 5

Resolver las las siguientes situaciones problemáticas

- 13) Hallar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su altura es 3 cm mayor que su base y que su superficie es 70 cm².
- 14) Las medidas en centímetros de la hipotenusa y del cateto mayor de un triángulo rectángulo son números naturales consecutivos. Al cateto menor le faltan 7 cm para igualar al mayor. ¿Cuánto miden los tres lados?
- 15) Sobre la esquina de un terreno rectangular que tiene 50 m más de fondo que de frente, se construye una casa de 15 m por 30 m. Si queda libre una superficie de 4550 m², calcular la medida del frente del terreno.
- 16) Un prado rectangular de 60 m por 40 m es excavado para hacer una piscina en su interior, dejando una franja de césped de ancho uniforme en torno a la misma. El área de la piscina es 1/8 del prado. ¿Cuál es el ancho de la franja de césped?
- 17) Sabiendo que la imagen ocupa un área de 1350 cm², calcular el ancho x del marco.



- 18) Calcular el perímetro del siguiente trapecio utilizando la información dada.





Tipo de soluciones de una ecuación cuadrática

Disparo de emergencia



Desde un barco que se halla en situación de emergencia, se efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales.

El destello podrá verse desde la base naval más cercana únicamente mientras se encuentre a una altura no menor de 195 m sobre el nivel del mar.

Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que se dispara, la altura del destello estará dada por:

$$h(t) = 80 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar, en metros, cuando hayan transcurrido t segundos desde el momento del disparo.

Analicemos en qué momentos la señal luminosa se encuentra a una altura de 275 m, 320 m y 340 m.

a) Planteamos $h(t) = 275$

.....
.....
.....
.....

Obtuvimos **dos soluciones** que se ajustan al problema: una corresponde al trayecto de ascenso y la otra al de descenso.

b) Planteamos $h(t) = 320$

.....
.....
.....
.....

Obtuvimos una **única solución**: interpretamos que el destello estará a 320 m de altura en un único instante.



c) Planteamos $h(t) = 340$

.....

.....

.....

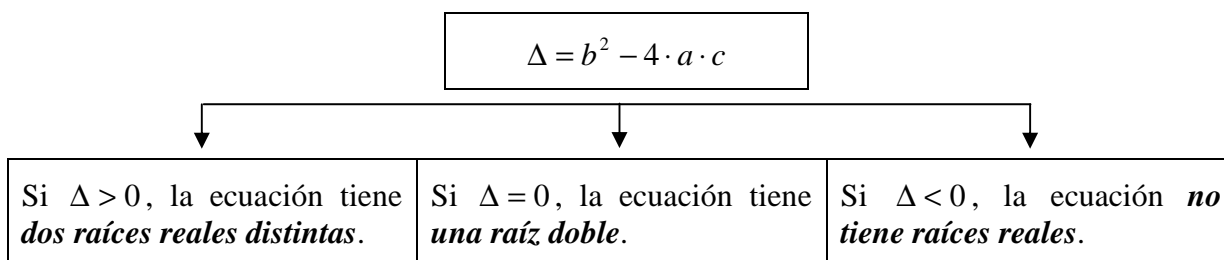
.....

Como el radicando es negativo, esta ecuación **no tiene soluciones reales**, es decir, que el destello en ningún momento alcanzará esa altura.

Discriminante

La expresión $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ nos permite discriminar el tipo de raíces que tiene la ecuación cuadrática, por eso la llamamos discriminante.

La simbolizamos con la letra griega: Δ



Sin resolver las, indicar el tipo de raíces de cada una de las siguientes ecuaciones

19) $\frac{x}{x^2 + 4x - 2} = \frac{5}{x + 3}$

20) $\frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{4 \cdot (2x - 5)} = \frac{1}{4}$

21) $\frac{x^2 + 3x - 2}{3x^2 - 5x + 8} = \frac{3}{4}$

22) $(2x + 3)^2 + \frac{5}{4}x^2 = (2x - 2) \cdot (2x + 2)$

23) $\frac{2}{5}x^2 + \left(\frac{1}{2}x - 5\right)^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5}x\right)^2$



Hallar los posibles valores de m para que se cumpla la condición pedida en cada caso

24) $x^2 + mx + 3 = 0$ tiene una raíz doble.

25) $2x^2 - x = m$ no tiene raíces reales.

26) $x^2 - (m - 3)x + m = 0$ tiene una raíz doble.

27) $x^2 + x = 5m$ tiene dos raíces reales y distintas.

28) $\left(\frac{11 - 5m}{4}\right)x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$ tiene una raíz doble.