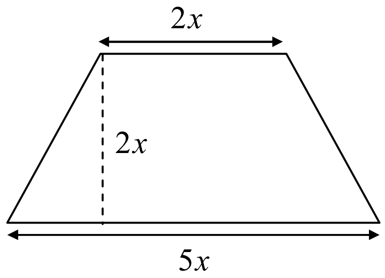
Ecuaciones cuadráticas

Resolver las siguientes situaciones problemáticas

Problema 1: Calcular el perímetro de la figura, sabiendo que su área es de 28 cm^2.



Problema 2: La edad de Mariano elevada al cuadrado es igual a seis veces la edad de Facundo. Si Facundo y Mariano tienen la misma edad, ¿cuántos años tienen cada uno?

Problema 3: Dos ciclistas A y B parten de un punto P al mismo tiempo y en direcciones que forman un ángulo recto entre sí. B se desplaza 2 km/h más rápido que A. Después de una hora se encuentran a 10 km de distancia uno del otro. ¿Cuál es la velocidad de cada uno de ellos?

Llamamos ***ecuaciones cuadráticas*** o ***ecuaciones de segundo*** grado a las ecuaciones que pueden expresarse de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

En el caso en que aparezcan los tres términos (cuadrático, lineal, independiente), la ecuación se llama ***completa***, en caso contrario ***incompleta***.

Como podemos ver, en el problema 3 no podemos despejar x ni sacar factor común. Por lo tanto, para poder resolver la ecuación planteada vamos a completar el siguiente procedimiento:

• *Restamos 4 a ambos miembros de la igualdad.*

• *Dividimos por dos a ambos miembros de la igualdad.*

• *Sumamos 1 a ambos miembros de la igualdad.*

• *¿Cómo podemos expresar el primer miembro de la igualdad anterior?*

• *Para poder despejar la variable x, aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros.*

• *Planteamos las dos posibilidades.*

El procedimiento utilizado se lo llama *"completar cuadrados"*. Si aplicamos un procedimiento similar a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, obtendremos una fórmula para hallar las raíces x_1 y x_2. La llamamos ***fórmula resolvente*** y la utilizaremos cuando necesitemos resolver una ***ecuación cuadrática completa***.

Fórmula resolvente

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) pueden obtenerse reemplazando los coeficientes ***a***, ***b*** y ***c*** en las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Para abreviar, las reunimos en una sola fórmula:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $\frac{4}{5}x^2 + 4x - 400 = 0$ aplicando la fórmula resolvente.

En primer lugar, identificamos los coeficientes:

$a = \ldots\ldots$ $\quad b = \ldots\ldots$ $\quad c = \ldots\ldots$

Reemplazamos en la fórmula resolvente:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{\ldots\ldots \pm \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}{2 \cdot \ldots\ldots}$$

$$x_1, x_2 = \frac{\ldots\ldots \pm \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}{2 \cdot \ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots \pm \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

$$x_1 = \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots \qquad x_2 = \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$$

<u>Resolver las siguientes ecuaciones</u>

1) $\frac{1}{5} \cdot (x+2)^2 - \frac{(x+3) \cdot (x-3)}{4} = \frac{(x+3)^2}{2} - \frac{11}{5}x - \frac{51}{20}$ $\qquad R: \pm\sqrt{2}$

2) $(x+1) \cdot (x-1) - \frac{6-5x}{3} = (x+2)^2$ $\qquad R: -3$

3) $\frac{5x-8}{x-1} = \frac{7x-4}{x+2}$ $\qquad R: \frac{5}{2}, 4$

4) $(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$ $\qquad R: 0, -\frac{26}{3}$

5) $-4 \cdot \left(2x - \frac{1}{4}\right) + (x+4)^2 = 2 \cdot (7+x) \cdot (x-7) + 34$ $\qquad R: \pm 9$

6) $\frac{(x+3)^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{x-1}{3} = \frac{(x+1)(x+3)}{6} - \frac{1}{3} + \frac{11}{3}x$ $\qquad$ *R: no tiene solución real*

7) $(x-1)^2 = \frac{1}{2} \cdot (3x+2)$ $\qquad R: 0, \frac{7}{2}$

8) $\frac{1}{2}(x^2 - 3x) + \frac{x \cdot (x-2)}{4} = \frac{1}{8} \cdot (3x-2)^2 - 1$ $\qquad R: -2, \frac{2}{3}$

9) $\dfrac{(x+2)^2}{5}-\dfrac{x^2-9}{4}=\dfrac{(x+3)^2}{2}+\dfrac{1}{5}$ $\qquad R: -3, -1$

10) $(x-4)^2-\left(\dfrac{7x-3}{-2}\right)=(x+5)\cdot(x-5)+1$ $\qquad R: \dfrac{77}{9}$

11) $\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x-2}{4}$ $\qquad R: 6, 16$

12) $\dfrac{1}{3}(x-2)^2-\dfrac{(x+1)\cdot(x-5)}{2}=1+\dfrac{x-1}{2}$ $\qquad R: -4, 5$

<u>Resolver las las siguientes situaciones problemáticas</u>

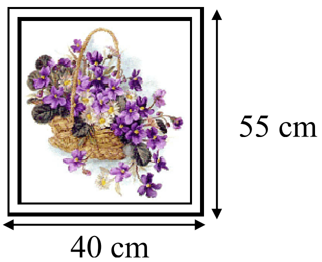
13) El lado de un rectángulo es el doble del otro. Si al mayor se le aumenta en 2 unidades y al menor se disminuye en 2 unidades, el rectángulo que se obtiene tiene 4 m^2 de área más que la mitad del área del rectángulo inicial. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo inicial.

14) Las medidas en centímetros de la hipotenusa y del cateto mayor de un triángulo rectángulo son números naturales consecutivos. Al cateto menor le faltan 7 cm para igualar al mayor. ¿Cuánto miden los tres lados?

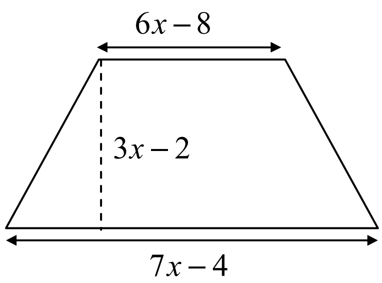
15) Sobre la esquina de un terreno rectangular que tiene 50 m más de fondo que de frente, se construye una casa de 15 m por 30 m. Si queda libre una superficie de 4550 m^2, calcular la medida del frente del terreno.

16) Un prado rectangular de 60 m por 40 m es excavado para hacer una piscina en su interior, dejando una franja de césped de ancho uniforme en torno a la misma. El área de la piscina es 1/8 del prado. ¿Cuál es el ancho de la franja de césped?

17) Sabiendo que la imagen ocupa un área de 1350 cm^2, calcular el ancho x del marco.



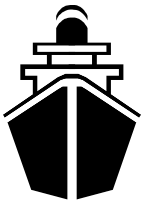
18) Calcular el perímetro del siguiente trapecio utilizando la información dada.



Área: 28 cm^2

Tipo de soluciones de una ecuación cuadrática

Disparo de emergencia



Desde un barco que se halla en situación de emergencia, se efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales.

El destello podrá verse desde la base naval más cercana únicamente mientras se encuentre a una altura no menor de 195 m sobre el nivel del mar.

Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que se dispara, la altura del destello estará dada por:

$$h(t) = 80 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

donde *h* es la altura sobre le nivel del mar, en metros, cuando hayan transcurridos *t* segundos desde el momento del disparo.

Analicemos en qué momentos la señal luminosa se encuentra a una altura de 275 m, 320 m y 340 m.

a) Planteamos $h(t) = 275$

Obtuvimos ***dos soluciones*** que se ajustan al problema: una corresponde al trayecto de ascenso y la otra al de descenso.

b) Planteamos $h(t) = 320$

Obtuvimos una ***única solución***: interpretamos que el destello estará a 320 m de altura en un único instante.

c) Planteamos $h(t) = 340$

Como el radicando es negativo, esta ecuación ***no tiene soluciones reales***, es decir, que el destello en ningún momento alcanzará esa altura.

Discriminante

La expresión $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ nos permite discriminar el tipo de raíces que tiene la ecuación cuadrática, por eso la llamamos discriminante.

La simbolizamos con la letra griega: Δ

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$$

Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene ***dos raíces reales distintas***.	Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene ***una raíz doble***.	Si $\Delta < 0$, la ecuación ***no tiene raíces reales***.

<u>Sin resolverlas, indicar el tipo de raíces de cada una de las siguientes ecuaciones</u>

19) $\dfrac{x}{x^2 + 4x - 2} = \dfrac{5}{x+3}$

20) $\dfrac{(x+2)\cdot(x-2)}{4\cdot(2x-5)} = \dfrac{1}{4}$

21) $\dfrac{x^2 + 3x - 2}{3x^2 - 5x + 8} = \dfrac{3}{4}$

22) $(2x+3)^2 + \dfrac{5}{4}x^2 = (2x-2)\cdot(2x+2)$

23) $\dfrac{2}{5}x^2 + \left(\dfrac{1}{2}x - 5\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{5}x\right)^2$

<u>Hallar los posibles valores de m para que se cumpla la condición pedida en cada caso</u>

24) $x^2 + mx + 3 = 0$ tiene una raíz doble.

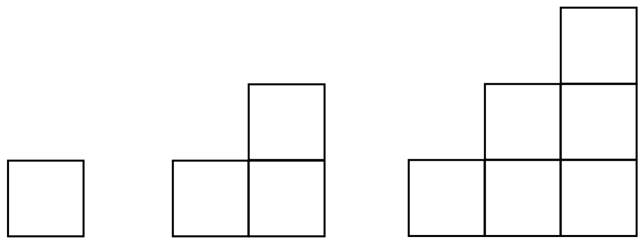
25) $2x^2 - x = m$ no tiene raíces reales.

26) $x^2 - (m-3)\,x + m = 0$ tiene una raíz doble.

27) $x^2 + x = 5m$ tiene dos raíces reales y distintas.

<u>Para pensar…</u>

La siguiente sucesión de cuadrados se obtiene agregando cada vez una fila más abajo con un cuadrado más.



a) ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura que ocupa la séptima posición?

....

b) ¿Podrías determinar la cantidad de cuadrados que tendrá la figura que se encuentra en la posición 32?

....

c) Si hay 231 cuadrados, ¿qué posición ocupa la figura?

....

d) ¿Habrá alguna figura formada por 70cuadrados? ¿Por qué?

....