Expresiones algebraicas fraccionarias

Definición

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, tal $Q(x)$ sea distinto de cero, se denomina ***expresión algebraica fraccionaria*** a toda expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x+2}{x-x^2} = \frac{x+2}{x\cdot(1-x)} \qquad \forall x : x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

Una expresión algebraica es ***irreducible*** si no existen en ella factores comunes al numerador y al denominador.

a) $\dfrac{x}{x-3} \qquad \forall x : x \neq 3$

b) $\dfrac{x^2+x}{x^3-2\cdot x^2-3\cdot x} = \dfrac{x\cdot(x+1)}{x\cdot(x^2-2\cdot x-3)} = \dfrac{x\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-3)} \qquad \forall x : x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 3$

La expresión ***a*** es una expresión algebraica________________________ , mientras que la expresión ***b*** es________________________ .

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

Para ***simplificar*** una expresión algebraica fraccionaria se debe factorizar el numerador y denominador, y cancelar los factores comunes en ambos; de esta manera se obtiene una ***expresión irreducible equivalente a la original***.

Ejemplo:

$$\frac{x^2-3\cdot x+2}{x^3-2\cdot x^2-x+2} = \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{1}{x+1} \qquad \forall x : x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2$$

• El objeto de simplificar es reducir la expresión y poder efectuar operaciones en forma más sencilla.

Actividades

1) Indicar cuáles de las siguientes expresiones son algebraicas fraccionarias.

a) $3 \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - 5$

b) $5 \cdot x^{-1}$

c) $\frac{x-2}{3}$

d) $(x+3) \div x^5$

2) Simplificar las siguientes expresiones algebraicas

a) $\frac{a \cdot x^4 - a}{(3x^2+3) \cdot (x^2+2x+1)} =$

b) $\frac{2 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 8}{x^3 - 16 \cdot x + x^2 - 16} =$

c) $\frac{a \cdot x - a \cdot x^2}{x^3 - 2 \cdot x^2 + x} =$

d) $\frac{6x^2 - 3x^3 + 6x - 3x^4}{x^3 + x^2 - 2x - 2} =$

e) $\frac{-x^2 - 14 \cdot x - 49}{2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 14} =$

f) $\frac{bx^9 + bx^6 - bx^7 - bx^4}{x^6 - x^5 + x^3 - x^2} =$

g) $\frac{3x^3 + 24}{x^3 - 2x^2 + 4x - bx^2 + 2bx - 4b} =$

h) $\frac{y^3x^2 + 4x^2y + 2y^2x^2 + 8x^2}{xy^4 - 16x} =$

i) $\frac{x^3 - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 12}{x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12} =$

j) $\frac{ax^4 + 8ax^2 - 4ax^3 - 16ax + 16a}{-2x^4 + 32} =$

Multiplicación de expresiones algebraicas fraccionarias

El resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión algebraica fraccionaria cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{2 \cdot x - 3}{x+5} \cdot \frac{x^2 - 25}{6 \cdot x - 9} = \frac{2 \cdot x - 3}{x+5} \cdot \frac{(x-5) \cdot (x+5)}{3 \cdot (2 \cdot x - 3)} = \frac{x-5}{3} \qquad \forall x : x \neq -5 \wedge x \neq \frac{3}{2}$$

División de expresiones algebraicas fraccionarias

El resultado de dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión que se obtiene multiplicando la primera expresión por la recíproca de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{2\cdot x+2}{x^2+4\cdot x+4}\div\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{2\cdot x+2}{x^2+4\cdot x+4}\cdot\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{2\cdot(x+1)}{(x+2)^2}\cdot\frac{x+2}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{2}{(x+2)\cdot(x-1)}$$

$$\forall x: x\neq -2 \wedge x\neq 1 \wedge x\neq -1$$

<u>Actividades</u>

3) Efectuar las siguientes multiplicaciones y divisiones.

***a)** $\frac{1}{x}\cdot\frac{x+1}{x^2+x}\cdot\frac{x^4-1}{x^2-1}=$

b) $\frac{25-x^2}{x^2+x}\div\frac{x-5}{3\cdot x+3}=$

c) $\frac{x^3-8}{x^2-4}\div\frac{2\cdot x^4+4\cdot x^3+8\cdot x^2}{2\cdot x^3+4\cdot x^2}=$

d) $\frac{x^2-4}{2\cdot x^2+2\cdot x-12}\div\frac{x^3-7\cdot x-6}{2}\cdot\frac{5\cdot x^2-45}{x+1}=$

e) $\frac{x^3+cx^2}{x^2+2cx+c^2}\cdot\frac{y^2+2yc+c^2}{xy+xc}\cdot\frac{x+c}{xy+xc}=$

f) $\frac{0{,}25x^2-3x+9}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{0{,}5x-3}\right)\div\frac{x-6}{x^2-1}\cdot\frac{6}{x-1}=$

g) $\frac{-x^3+0{,}125}{4x^2-10x}\div\left(\frac{2x^3}{-x+0{,}5}\right)^{-1}\div\frac{x^3+0{,}5x^2+0{,}25x}{2x-5}=$

h) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-2\cdot x+4}\cdot(x^3+8)\cdot\frac{-8\cdot x}{2\cdot x^2+3\cdot x-2}=$

<u>Suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias</u>

Si las expresiones tienen ***igual denominador***, se suman o restan sus numeradores según corresponda.

Ejemplos:

a) $\frac{x}{x-2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+x+2}{x-2}=\frac{2\cdot x+2}{x-2}=\frac{2\cdot(x+1)}{x-2}\qquad \forall x: x\neq 2$

b) $\frac{1}{x-1}-\frac{2\cdot x-1}{x-1}=\frac{1-2\cdot x+1}{x-1}=\frac{-2\cdot x+2}{x-1}=\frac{-2\cdot(x-1)}{x-1}=-2\qquad \forall x: x\neq 1$

Para expresiones de ***distinto denominador***, estas se deben transformar en otras, equivalentes a las dadas, que tengan el mismo denominador.

Este denominador (denominador común) es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores de las expresiones originales y se obtiene multiplicando los ***factores comunes y no comunes con su mayor exponente.***

Ejemplo:

a) $$\frac{1}{2\cdot x-2}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2\cdot(x-1)}+\frac{2}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{x}{x+1}$$

$$=\frac{1\cdot(x+1)}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}+\frac{2\cdot 2}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{2\cdot x\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

$$=\frac{x+1+4-2\cdot x\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x+1+4-2\cdot x^2+2\cdot x}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-2\cdot x^2+3\cdot x+5}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

$$=\frac{-2\cdot(x+1)\cdot(x-\frac{5}{2})}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=-\frac{(x-\frac{5}{2})}{(x-1)}\qquad \forall x: x\neq -1 \wedge x\neq 1$$

<u>Actividades</u>

4) Efectuar las siguientes sumas y restas de expresiones algebraicas fraccionarias

a) $\dfrac{12}{x^2+2\cdot x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x+2}=$

b) $\dfrac{3\cdot x^3}{(x+2)\cdot(x-2)}-\dfrac{24\cdot x}{x^2-4}+\dfrac{48}{x^3-4\cdot x}=$

c) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x^2+4}{x^2+4\cdot x+4}-\dfrac{2\cdot x^2+4\cdot(2\cdot x+2)}{(x+2)^3}=$

d) $\dfrac{x-6}{x^2-3x+9}-\dfrac{x^3}{x^3+27}+1=$

e) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+ax+x+a}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{1+a}{x^3+ax^2-x-a}=$

<u>Operaciones combinadas</u>

Se denominan ***operaciones combinadas*** entre expresiones algebraicas fraccionarias a toda ***suma algebraica de operaciones entre polinomios***.

Para resolver las operaciones combinadas se debe tener en cuenta la simplificación, multiplicación, división, suma y resta de fracciones algebraicas.

Los pasos a seguir para resolver una operación combinada son:

- separar en términos.

- efectuar las operaciones indicadas en cada término.
- si es posible, simplificar e indicar el condicionamiento.

Ejemplo:

$$\frac{x^2+2\cdot x-3-x\cdot(x+3)}{\dfrac{x+3}{(x+4)^2}\div\dfrac{4}{x+4}}=\frac{x^2+2\cdot x-3-x^2-3\cdot x}{\dfrac{x+3}{(x+4)^2}\cdot\dfrac{x+4}{4}}=\frac{-x-3}{\dfrac{x+3}{4\cdot(x+4)}}=-(x+3)\cdot\frac{4\cdot(x+4)}{x+3}$$

$$=-4\cdot(x+4)\qquad \forall x: x\neq -4\wedge x\neq -3$$

Actividades

5) Realizar las siguientes operaciones combinadas y simplificar los resultados cuando sea posible.

a) $\left(\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{4x+19}{x^2-9}\right)\div\dfrac{3x^2-24x+48}{3x^2+9x}=$

b) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\div\dfrac{2\cdot x^4+4\cdot x^3+8\cdot x^2}{2\cdot x^3+4\cdot x^2}}=$

c) $\dfrac{\dfrac{x^2+7\cdot x+6}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x^2+6\cdot x+5}{x^2-1}}=$

d) $\dfrac{\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\right)\cdot\dfrac{x\cdot y}{x+y}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{xy}}=$

e) $\left(\dfrac{x^2-4}{3x^2+15x+18}\cdot\dfrac{x^3+8x^2+15x}{4x^3-8x^2}\right)\div\dfrac{4x+20}{3}-\dfrac{2-x}{4x^2}=$

f) $\left[\left(\dfrac{5}{3x^2-12}-\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{2x+1}{x-2}\right)\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{45x^3+135x^2+95x+10}\right]^2=$

Ecuaciones fraccionarias

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, tal $Q(x)$ sea distinto de cero, se denomina ***ecuación algebraica fraccionaria*** a toda expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0$$

Resolver una ecuación fraccionaria es encontrar las raíces del numerador $P(x)$ que no anulen al denominador $Q(x)$. Si alguna de las raíces del numerador es igual a alguna de las raíces del denominador, ésta debe ser descartada, ya que no es solución de la ecuación planteada.

Ejemplo:

$$\frac{2}{x-2}+1=\frac{x-1}{x+3} \qquad \forall x: x \neq 2 \wedge x \neq -3$$

$$\frac{2+x-2}{x-2}=\frac{x-1}{x+3}$$

$$\frac{x}{x-2}-\frac{x-1}{x+3}=0$$

$$\frac{x\cdot(x+3)}{(x-2)\cdot(x+3)}-\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+3)}=0$$

$$\frac{x^2+3\cdot x}{(x-2)\cdot(x+3)}-\frac{x^2-3\cdot x+2}{(x-2)\cdot(x+3)}=0$$

$$\frac{x^2+3\cdot x-x^2+3\cdot x-2}{(x-2)\cdot(x+3)}=0$$

$$\frac{6\cdot x-2}{(x-2)\cdot(x+3)}=0$$

$$6\cdot x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{3} \qquad\qquad S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

<u>*Actividades*</u>

6) Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias.

a) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{x^2-5}{x^2-1}$

b) $\frac{x-2}{x^2-3\cdot x}+\frac{19\cdot x}{x^2}=\frac{-4\cdot x^2+3\cdot x-9}{x^2-3\cdot x}$

c) $\frac{x+1}{x+9}\cdot\frac{-x^2-9\cdot x}{x-6}=\frac{81-x^2}{2\cdot x+18}\div\frac{3}{x+1}$

d) $\frac{5x}{0{,}25x^2-1}+\frac{4}{0{,}5x-1}-\frac{5}{0{,}5x+1}=9$

e) $\frac{1}{x^3+4\cdot x^2+4\cdot x}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{x^2+4\cdot x+4}$

7) Hallar los valores de las constantes para que se cumplan las siguientes igualdades.

a) $\frac{x}{x^3+6x^2+11x+6}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$

b) $\frac{3x+12}{(x-2)\cdot(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$