El campo de los números reales

El origen de los números irracionales

Los números irracionales aparecen en la historia de la matemática vinculados a la geometría. Se supone que las magnitudes inconmensurables fueron descubiertas por la escuela pitagórica en el siglo VI A.C., al tratar de resolver problemas tales como la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular.

Los pitagóricos, creían ciegamente, como les había enseñado Pitágoras, que los números eran el concepto fundamental sobre el que se podía comprender la armonía del cosmos. Además, para ellos los números siempre se podían construir con regla y compás y toda longitud cabía en otra un número natural de veces o en su defecto un número de veces exacto y una fracción de la misma. Esto se debía a que ellos concebían las figuras constituidas por una cantidad finita de puntos.

El descubrimiento de que, existían longitudes que no cumplían esa regla, hacia tambalear las mismísimas palabras de Pitágoras acerca del papel de los números y la armonía del cosmos. Incluso, ponía en evidencia que muchas de sus demostraciones geométricas eran falsas o estaban incompletas.

Tal fue la crisis científica y moral en que sumergió el descubrimiento de las longitudes inconmensurables a la comunidad pitagórica que, aunque mantenían en secreto todos sus descubrimientos, éste tenía un motivo más importante.

No obstante, Hipaso, uno de los baluartes de los matemáticos pitagóricos, dio a conocer igualmente "la naturaleza conmensurable e inconmensurable a quienes no eran dignos de participar de tales conocimientos" y por ello fue expulsado de la comunidad.

Los pitagóricos, aún con Hipaso en vida, le construyeron una tumba, dando a entender que para ellos estaba muerto, y no mucho tiempo después éste murió en un misterioso naufragio.

Transitemos un posible camino que llevo a los pitagóricos a descubrir este nuevo conjunto numérico:

- Construir un cuadrado cuyo lado mida 1 cm.
- Trazar en él una de sus diagonales.
- Calcar la longitud de esa diagonal.

¿Cuál es su medida? Este valor ¿es un número natural? ¿Es racional? (recordar que todo número racional es aquel que se puede expresar como el cociente entre dos números enteros). ¿Se puede calcular con exactitud el valor de la diagonal?

Todos los números con idénticas características al valor de la diagonal se los denomina ***números irracionales***. Se pueden definir como aquellos que no pueden expresarse como cociente entre dos números enteros y además poseen infinitas cifras decimales no periódicas.

Números irracionales con nombre propio

Las disposición de las hojas a lo largo de los tallos de las plantas, las tarjetas de crédito, el sistema solar, la sucesión de Fibonacci, la pirámide de Keops, la Gioconda de Leonardo da Vinci, parecen estar regidos por un mismo principio, una misma proporción. El universo parece susurrarnos un código en cada rincón de la naturaleza, un código único y armónicamente estético: el número de oro.

- Investigar sobre el origen de este número y su presencia en los distintos ámbitos (naturaleza, arquitectura, fotografía, etc).

Resolver las siguientes ecuaciones

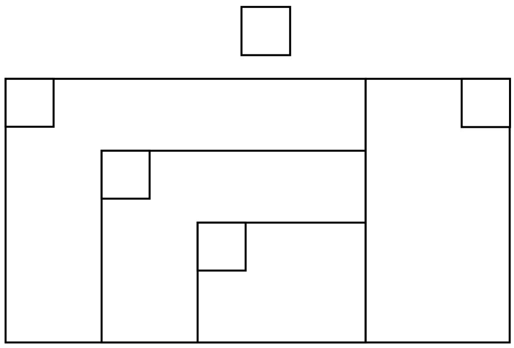
a) $\frac{9x-8}{-1}-\frac{10x-6}{3}-2=-\frac{2x-1}{7}$

b) $\frac{25}{9}+\left(-\frac{5}{3}x+1\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}x-1-\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)$

c) $(x-3)^2-\left(\frac{6x-1}{-2}\right)=(x+5)\cdot(x-5)+3$

d) $\frac{1}{5}\cdot(x+2)^2-\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{4}=\frac{(x+3)^2}{2}-\frac{11}{5}x-\frac{51}{20}$

Colocar el símbolo que identifica a cada conjunto numérico en la etiqueta que corresponda y ubicar en el diagrama los números que se obtuvieron como resultados.



Buscando regularidades

Se pueden generar números irracionales sin necesidad que sean raíces de números racionales. Para poder lograrlo, hay que tener en cuenta que:

- No pueden expresarse como una fracción.
- No poseen un número finito de cifras decimales.
- No tienen un período que se repite.

Actividades

1) Escribir 5 raíces cuadradas cuyos resultados sean números irracionales.

2) Generar cinco números irracionales y explicar el procedimiento utilizado.

3) Indicar cuál de los siguientes números es racional y cuál es irracional. Justificar tu respuesta.

$$\frac{3}{5} \qquad 0{,}141144111444\ldots \qquad 3{,}75 \qquad 3{,}2222\ldots \qquad \sqrt{146} \qquad \sqrt{361}$$

$$0{,}437537537\ldots \qquad 0{,}494949\ldots \qquad 2{,}101001000100001\ldots \qquad \sqrt{3721}$$

4) Ubicar 3 números irracionales entre estos números:

a) -15 y $-15{,}1$

b) $\sqrt{2}$ y $\frac{3}{2}$

5)¿Las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas?

a) $\sqrt{169}$ es un número racional.

b) $\sqrt[3]{125}$ es un número irracional.

c) Los números cuya expresión decimal es periódica, son irracionales.

d) Todo número se puede escribir como el cociente de dos números enteros.

e) Entre dos números irracionales existe algún número irracional.

Los irracionales en la recta numérica

Algunos números irracionales se pueden representar en la recta real mediante procedimientos geométricos utilizando regla y compás. Este es el caso de las raíces cuadradas no exactas. Para muchos números irracionales no se puede aplicar este método, la representación de estos números se hace por aproximación.

Por ejemplo, para calcular el punto que representa el número $\sqrt{2}$ se realizan los siguientes pasos:

- Se construye un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 1. La medida de la hipotenusa es $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.
- Con un compás con centro en 0, se marca un arco de circunferencia de radio igual a la hipotenusa, y de esta manera, se traslada su medida, que es $\sqrt{2}$, a un punto de la recta.

¿Cómo se representará la $\sqrt{3}$?

<u>Raíz enésima de un número real</u>

- Calcular la medida de la arista de un cubo, sabiendo que la superficie total de sus caras es de 60 cm^2.

Se llama ***radical*** a una expresión de la forma:

$$\sqrt[n]{a} \text{ con } a \in R,\ n \in N \text{ y } n > 1$$

en la cual n es el índice y a es el radicando.

Todo radical puede expresarse en forma de potencia de exponente fraccionario, según la siguiente regla:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Actividades

1) Expresar las siguientes potencias como raíz.

a) $(-2)^{\frac{1}{3}} =$ __________ ***b)*** $6^{-\frac{2}{3}} =$ __________ ***c)*** $8^{0,5} =$ __________

d) $32^{-0,4} =$ __________ ***e)*** $(-125)^{\frac{1}{6}} =$ __________

2) Expresar como una potencia:

a) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[6]{2} =$ ____________________ ***b)*** $3 : \sqrt{3} =$ ____________________

c) $5^3\,.\,\sqrt[3]{5^7} =$ ____________________ ***d)*** $\sqrt[4]{7} : \sqrt{\dfrac{1}{7}} =$ ____________________

Propiedades de la radicación

En muchos casos, las propiedades de la radiación permiten simplificar los cálculos y trasformar expresiones que contienen radicales en otras equivalentes más sencillas.

Propiedad distributiva

a) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

b) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Simplificación de radicales

c) Si n es impar: $\sqrt[n]{x^n} = x$

d) Si n es par: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

Propiedad distributiva

e) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$

Actividades

1) Resolver aplicando las propiedades y simplificar las expresiones obtenidas.

a) $\sqrt[3]{27\,.\sqrt{3}} =$ _______ ***b)*** $\sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{2}}{9}} =$ ________ ***c)*** $\sqrt[5]{\sqrt{3}\,.(-32)} =$ _______

______________________ ______________________ ___________________________

2) Simplificar los siguientes radicales y expresar el resultado como potencia de exponente fraccionario.

a) $\sqrt[4]{4} =$ ______________________ ***b)*** $\sqrt[6]{27} =$ ______________________

c) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{1024}\right)^{-1}} =$ ____________________ ***d)*** $\sqrt[6]{(-3)^8} =$ ____________________

e) $\sqrt{(-5)^8} =$ ____________________ ***f)*** $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3^5}\right)^2} =$ ____________________

3) Encontrar el valor de ***a*** para que se verifique la igualdad.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[a]{7}} = \sqrt[18]{7}$
$a =$ __________

b) $\sqrt[2a]{\sqrt[4]{(-2)}} = \sqrt[16]{(-2)}$
$a =$ __________

c) $\sqrt[a]{\sqrt[a]{\sqrt[a]{8}}} = \sqrt[8]{8}$
$a =$ __________

d) $\sqrt[a+3]{5} = \sqrt[a]{\sqrt{5}}$
$a =$ __________

<u>Extracción de factores de un radical.</u>

Existen factores, dentro de un radical, que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o a lo sumo igual que el índice de la raíz. Para ello deben aplicarse las propiedades de la potenciación y radicación.

- $\sqrt[3]{16 \cdot x^7} = \sqrt[3]{2^4 \cdot x^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 2x^2 \cdot \sqrt[3]{2x}$
- $\sqrt{\frac{8x^2}{y^3}} = \sqrt{\frac{2^3 \cdot x^2}{y^3}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 2 \cdot x^2}{y^2 \cdot y}} = \frac{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2} \cdot \sqrt{y}} = \frac{2 \cdot |x| \cdot \sqrt{2}}{|y| \cdot \sqrt{y}} = \frac{2 \cdot |x|}{|y|} \cdot \sqrt{\frac{2}{y}}$

<u>Actividades</u>

1) Extraer todos los factores posibles de cada uno de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[2]{49 \cdot x^5 \cdot y^{21}} =$

b) $\sqrt[5]{2187 \cdot x^{26} \cdot y^3} =$

c) $\sqrt[4]{\frac{729 \cdot x^9 \cdot y}{32}} =$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{343 \cdot x^{16}}{3125 \cdot y^6}} =$

e) $\sqrt[2]{\dfrac{27 \cdot x^6 \cdot y^3 \cdot z^2}{392 \cdot y^6}} =$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{x^6 \cdot (2y)^8 \cdot z^2}{2}} =$

g) $\sqrt[2]{\dfrac{1944 \cdot x^8 \cdot y}{z^{31}}} =$

2) Introducir dentro del radical todos los factores posibles que se encuentren fuera de él.

a) $2x \cdot \sqrt[4]{8xy^3} =$

b) $\dfrac{1}{81} x^2 \cdot y^3 \cdot \sqrt[3]{2xy^2} =$

c) $\dfrac{1}{2} x^{-2} \cdot y \cdot \sqrt[3]{4xyz} =$

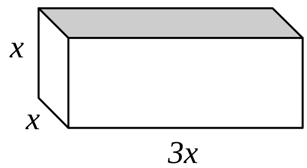
d) $\dfrac{24 \cdot x^7 \cdot y}{z} \cdot \sqrt[2]{\dfrac{3xy}{z}} =$

<u>Suma y resta de radicales.</u>

La superficie de una de las dos caras cuadradas de un prisma como el de la figura es de 2 cm^2.

a) Calcular la medida de cada arista.

b) Calcular la suma de todas las aristas.



Dos o más radicales pueden sumarse o restarse siempre que sean semejantes, es decir, que tengan el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo:

$\sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{32} =$

<u>Actividades</u>

1) Realizar las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{675} - \sqrt{12} =$

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{16} =$

c) $2\cdot\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{(-5)}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}=$

d) $3\cdot\sqrt[3]{108}+\frac{1}{10}\sqrt[3]{625}+\frac{1}{7}\sqrt[3]{1715}-4\cdot\sqrt[3]{32}=$

e) $\frac{3}{4}\sqrt{176}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}+\frac{1}{5}\sqrt{275}=$

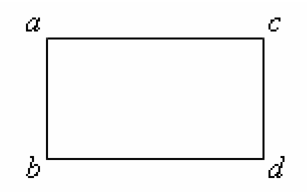
f) $7\cdot\sqrt{54}-3\cdot\sqrt{18}+\sqrt{24}-\frac{3}{5}\sqrt{50}-\sqrt{6}=$

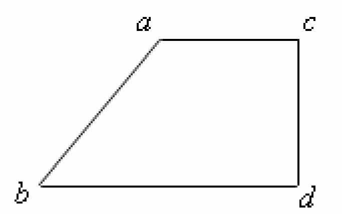
g) $2\cdot\sqrt{80}+\frac{14}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}-\sqrt{8}-\frac{9}{4}\sqrt{1-\frac{1}{81}}=$

h) $6\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[9]{125}-\sqrt[3]{625}=$

i) $4\cdot\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{64}+\sqrt{48}=$

2) Hallar el perímetro de las siguientes figuras, cuyas medidas están expresadas en cm.

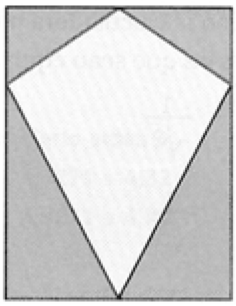




$bc=2\sqrt{5}$ $\quad dc=\sqrt{2}$

$ab=3\sqrt{8}$ $\quad bd=\sqrt{324}$ $\quad cd=\sqrt{32}$

<u>Multiplicación y división de radicales.</u>



La base del rectángulo mide $2\sqrt{3}$ cm y la altura $\sqrt{6}$ cm.

a) Calcular el área del rectángulo.

b) Calcular el área del romboide.

Para multiplicar o dividir radicales de igual índice, se sigue el siguiente procedimiento, basado en la propiedad distributiva:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos:

$\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=$

$$\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}} =$$

Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice se deben buscar radicales equivalentes de modo que todos tengan igual índice.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[2]{3} =$$

<u>Actividades</u>

1) Realizar las siguientes operaciones.

a) $\left(\sqrt{80} - \sqrt{45}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} =$

b) $2 \cdot \sqrt{54} \div \left(-3 \cdot \sqrt[3]{18}\right) =$

c) $\left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} =$

d) $\dfrac{(3 \cdot \sqrt{6} - 2 \cdot \sqrt{3})^2 - 66}{3 \cdot \sqrt[6]{18}} =$

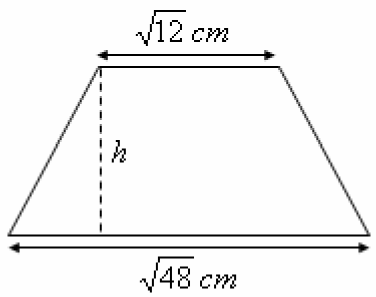
e) $\dfrac{\sqrt{128} - \sqrt{162}}{\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}} =$

f) $\left[-62 + (2 \cdot \sqrt{3} - 5 \cdot \sqrt{2})^2\right] \div \sqrt[3]{12} =$

g) $1 - \sqrt{2} \cdot \left[1 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (3 - \sqrt{2})\right] =$

h) $\dfrac{\sqrt{162} - \sqrt{128}}{\sqrt[5]{486} + \sqrt[5]{64}} =$

2) Expresar en forma exacta la medida de la altura sabiendo que el área es $18\sqrt{2}\ cm^2$.



<u>Racionalización de denominadores</u>

Racionalizar un denominador significa transforma una expresión con denominador irracional en otra equivalente con denominador racional.

Caso 1

$$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}}=$$

Caso 2

$$\frac{1}{\sqrt[5]{9}}=$$

Caso 3

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}}=$$

<u>Actividades</u>

1) Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{\sqrt{8}}=$

b) $\dfrac{1+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{375}}=$

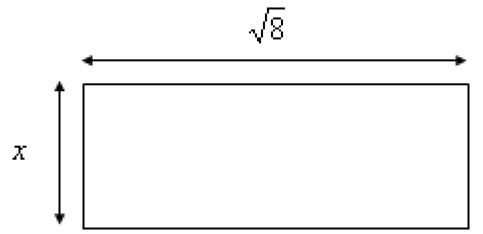
c) $\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}=$

d) $\dfrac{2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{12}-\sqrt{54}}=$

e) $\dfrac{1+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{40}}=$

f) $\dfrac{\sqrt{5}}{5\cdot\sqrt{120}}=$

2) La siguiente figura tiene área 1.Hallar el valor de x. Expresar el resultado sin radicales en el denominador.



3)Sin utilizar la calculadora, analizar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas

a) $\sqrt{3}-1=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

b) $\dfrac{6-\sqrt{12}}{2\,.\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

c) $\dfrac{5\,.\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}=\sqrt{6}-6$

d) $\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{2}}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{\sqrt{6}}{10}$

4) Expresar los radicales como potencias y resolver aplicando propiedades. Expresar el resultado como radical, llevándolo a la mínima expresión y racionalizando si fuera necesario.

a) $\dfrac{5\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\cdot\sqrt[5]{25}\right)^{-\frac{1}{3}}}}=$

b) $\dfrac{625\times\sqrt[3]{5}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\times\sqrt[5]{125}\right)^{\frac{1}{3}}}}=$

c) $\dfrac{\left(\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{12}\right)^{3}}{18^{\frac{1}{2}}}=$

d) $5\cdot\sqrt[3]{5}\div\sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\cdot\sqrt[5]{25}\right)^{-\frac{1}{3}}}=$

5) Hallar el valor exacto de *x*.

a) $\sqrt{2}\,.\left(x-\sqrt{3}\right)+5\sqrt{6}=\dfrac{-\sqrt{6}}{2}$

b) $\dfrac{x+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{x-\sqrt{5}}{2}=0$

c) $\left(x+2\sqrt{10}\right).\left(x-\sqrt{40}\right)=\sqrt[3]{3^{6}}$

d) $\dfrac{x}{3.\sqrt[3]{2}}=\dfrac{6.\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$