

Polinomios

El depósito subterráneo

En una fábrica se debe construir un depósito subterráneo para instalar en él un tanque de combustible. Hay tres modelos de tanque: chico, mediano y grande. Cada uno de ellos requiere un depósito de forma cúbica de arista igual a 1m, 2m y 3m, respectivamente.

El depósito debe quedar enterrado en el suelo. Su parte superior, que es descubierta, estará al ras de la tierra. Su piso y sus cuatro paredes se cubrirán con planchas de fibrocemento, y todas las juntas entre esas planchas irán selladas con unos listones especiales de hierro.



La fábrica dispone de hasta \$ 6500 para construir el depósito.

Los costos son los siguientes: \$ 400 por metro cúbico excavado, \$ 120 por metro cuadrado de plancha de fibrocemento y \$ 40 por metro (lineal) de listón de hierro. Además, hay que agregar un gasto fijo de \$ 170

en concepto de flete.

¿Cuál de los tres depósitos puede construirse con ese presupuesto? Para saberlo buscaremos una fórmula para el costo de construcción en función de la arista x del depósito, en metros.

Analicemos en forma separada cada uno de los gastos.

- Por un lado tenemos el flete, cuyo costo de \$ es constante.
- Como el depósito es cúbico, todas las aristas son; entonces, el volumen del depósito en m^3 es: $V = \dots\dots\dots$

El costo de metro cúbico excavado es de \$ 400; por lo tanto, el costo total del volumen excavado es: $C_V = \dots\dots\dots$

- El depósito tiene un total de caras para cubrir con las planchas de fibrocemento. La superficie de cada plancha en m^2 es:

$$S = \dots\dots\dots$$

- El costo del m^2 de fibrocemento es de \$..... Entonces, el costo de una plancha es: $C = \dots\dots\dots$, y el costo de todas las planchas es:

$$C_p = \dots\dots\dots$$

- El depósito tiene un total de juntas entre todas sus caras. El costo del metro lineal de cada listón de hierro es \$ Un listón que cubre una junta cuesta:

$$C = \dots\dots\dots$$

y el costo de todos los listones es:

$$C_L = \dots\dots\dots$$



Traslademos los valores anteriores a esta tabla:

<i>Gastos</i>	<i>Costos</i>
Flete	
Listones de hierro	
Planchas de fibrocemento	
Excavación	
<i>Costo total</i>	

Cada uno de los términos hallados se lo denomina monomio, y a la suma de ellos, se lo llama **polinomio**.

El costo total de la construcción puede expresarse mediante la expresión:

$$C(x) = 400 \cdot x^3 + 600 \cdot x^2 + 320 \cdot x + 170$$

Escribimos $C(x)$ porque el costo es **función** de la longitud x de la arista del depósito.

Calculemos el costo total para aristas de 1m, 2m y 3m:

$$C(\dots) = 400 \cdot \dots + 600 \cdot \dots + 320 \cdot \dots + 170 = \dots$$

$$C(\dots) = 400 \cdot \dots + 600 \cdot \dots + 320 \cdot \dots + 170 = \dots$$

$$C(\dots) = 400 \cdot \dots + 600 \cdot \dots + 320 \cdot \dots + 170 = \dots$$

La empresa podrá construir el depósito que albergue el tanque:

Monomios

Los monomios son expresiones algebraicas de la forma:

$$M(x) = a \cdot x^n$$

donde a es un número real, llamado **coeficiente**; x es la **variable** y n es un número natural. Si $a \neq 0$, entonces n es el exponente o **grado** del monomio. Si $a = 0$, el monomio no tiene grado.

Ejemplo 1: el monomio $A(x) = \sqrt{2} \cdot x^4$ tiene un coeficiente igual a y es de grado

Ejemplo 2: el monomio $C(x) = 2 \cdot x^0 = 2$ tiene un coeficiente igual a y es de grado

Ejemplo 3: La expresión $H(x) = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ no es un monomio porque



Decimos que un monomio es mónico cuando su coeficiente es 1. Por ejemplo, $G(x) = x^6$ es un monomio mónico; en cambio, $F(x) = -x^6$ no lo es porque su coeficiente es -1 .

Polinomios

Observen la expresión $C(x) = 400 \cdot x^3 + 600 \cdot x^2 + 320 \cdot x + 170$. No podemos reducirla a un solo término, ya que las x tienen diferentes exponentes. $C(x)$ es la suma de varios monomios, y le damos el nombre de **polinomio**.

Los polinomios que estudiaremos son expresiones de la forma:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

donde a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 son números reales constantes, llamados **coeficientes**, x es la **variable**, y los exponentes de cada una de las x ($n, n-1, \dots, 0$) son números naturales constantes.

Ejemplo 1: $A(x) = 7 \cdot x^4 + 5 \cdot x + 2$ es un polinomio, pues los exponentes de las x son números

Ejemplo 2: $B(x) = 4 \cdot x^5 + x^{-2} + 3$ no es un polinomio, pues uno de los exponentes no es número

Ejemplo 3: $C(x) = -7 \cdot x^8$ es un polinomio de un solo término, llamado también

Así como a los polinomios de un solo término se los llama **monomios**, a los polinomios de dos términos se los llama **binomios** y a los de tres, **trinomios**.

Grado y características de los polinomios

El exponente del monomio de mayor grado de un polinomio nos indica el **grado** de ese polinomio.

Ejemplo: $P(x) = -4 \cdot x^7 + 5 \cdot x^4 - x^2 + 4 \cdot x - 6$ es un polinomio de grado

$Q(x) = 5 \cdot x^2 - 1$ es un polinomio de grado

$M(x) = 2 \cdot x - 5$ es un polinomio de grado

$T(x) = 8$ es un polinomio de grado Es decir que las constantes no nulas son polinomios de grado $Q(x) = 5 \cdot x^2 - 1$

En particular, $P(x) = 0 \cdot x^n + \dots + 0 \cdot x + 0$, es decir $P(x) = 0$ se llama **polinomio nulo**, y **no tiene grado**.

Éstas son algunas de las características de los polinomios:

- El coeficiente del monomio de mayor grado es el **coeficiente principal**.
- Un polinomio es **mónico** cuando su coeficiente principal es 1.
- Al término a_0 se lo llama **término independiente**.
- Un polinomio está **ordenado** cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados.

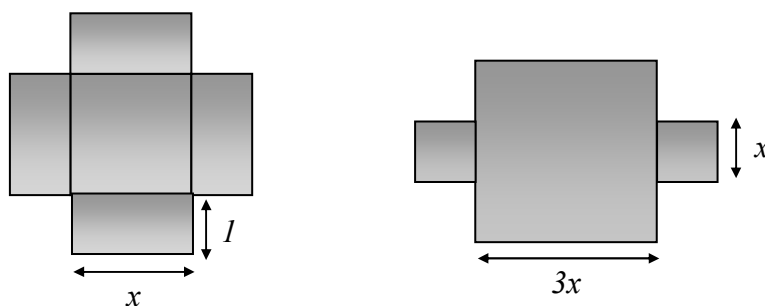
Especialización de un polinomio

En un polinomio $P(x)$, x es la variable. Cuando le asignamos un valor determinado, decimos que el polinomio $P(x)$ está **especializado** en ese valor:

Polinomio	Valor de x	Polinomio especializado en...
$F(x) = 3 \cdot x^4 + x^2 - 5$	$x = 1$	$F(1) = \dots\dots\dots$
$G(x) = -5 \cdot x^5 + 2 \cdot x^3 + x^2 - 3 \cdot x$	$x = 2$	$G(2) = \dots\dots\dots$
$H(x) = 2 \cdot x^7 + x^6 - x^5 + 3 \cdot x^2 + 4$	$x = -1$	$H(-1) = \dots\dots\dots$

Actividades

1) Determinar el polinomio que representa la superficie de cada una de las figuras e indicar su grado, coeficiente principal y término independiente.



2) Imagina que armas una caja con las figuras del punto 1), ¿cuál es el polinomio que representa el volumen?

3) Calcula el polinomio que representa:

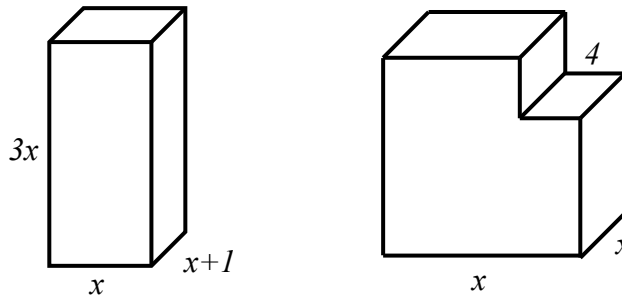
- a) El volumen y la superficie total de los cuerpos.
- b) Calcula para cada una:



$$V(5) = \dots\dots\dots S(5) = \dots\dots\dots$$

$$V(2) = \dots\dots\dots S(2) = \dots\dots\dots$$

¿Son todos los valores de x posibles? ¿Por qué?



Suma y resta de polinomios

Cuando se suman o se restan dos polinomios, el resultado es un **polinomio**. Consideremos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$: los coeficientes del resultado se obtienen sumando o restando los coeficientes respectivos de iguales potencias de la variable en las expresiones de $P(x)$ y $Q(x)$.

Ejemplo 1: Vamos a calcular la suma de los polinomios:

$$P(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 \text{ y } Q(x) = 5 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 8$$

$$P(x) + Q(x) = \dots\dots\dots$$

Ejemplo 2: Calculemos $A(x) - B(x)$ siendo:

$$A(x) = x^5 + 2 \cdot x^4 - 7 \cdot x^3 + 8 \text{ y } B(x) = 5 \cdot x^4 - 4 \cdot x^4 + x^3 - x + 1$$

$$A(x) - B(x) = \dots\dots\dots$$

El resultado de la suma o de la resta de dos polinomios puede ser el polinomio nulo o tener grado menor o igual que el del polinomio de mayor grado que estamos sumando o restando.

Polinomios opuestos

Escribe un polinomio cualquiera:

¿Qué polinomio debes sumarle al anterior para que el resultado tenga todos sus coeficientes cero?

.....

Si al sumar los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ obtenemos el polinomio nulo, entonces $P(x)$ son **polinomios opuestos**.

Actividades

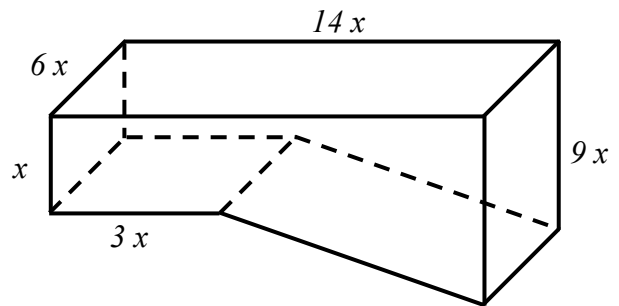
1) Completa el siguiente cuadro:

A	$2x^5 - 4x^3 + 8$		$4x^3 + 6x - 9$
B		$-x^2 - x + 1$	$5x^6 - 7x^3 + 2x$
$A + B$	$3x^5 + 4x^3 - 2$		
$A - B$		$2x^2 - 5x$	

2) Determina a , b , c y d sabiendo que:

$$3 + 4x + 5x^2 + 7x^3 = a + (a + b)x + (b - c)x^2 + dx^3$$

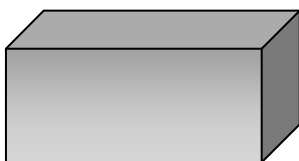
3) ¿Cuál es la función polinómica que determina el volumen de una pileta de natación como la que aparece en esta figura?



4) Halla el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente operación dé como resultado un polinomio de grado cuatro:

$$(3x^4 - 8ax^5 + 4x^3) - (2x^5 - ax^3) - (2x^2 + ax^5 - 7x^4)$$

Producto de monomios



Ejemplo 1: Calcula la función polinómica que representa el volumen del prisma sabiendo que la superficie de su base es igual a $6x^2$ y su altura a $3x$.



Para hallar el volumen del prisma debemos multiplicar la superficie de la base por su altura:

$$V(x) = \dots\dots\dots$$

El **coeficiente** del monomio producto es de los coeficientes de los factores.

El **grado** del polinomio producto es de los grados de los factores, si éstos no son nulos.

Si alguno de los factores es el polinomio nulo, el producto es el polinomio nulo.

Quando se multiplican dos monomios, el resultado es un monomio.

Producto de polinomios

Para calcular el producto, multiplicamos cada uno de los monomios de un polinomio por cada uno de los monomios del otro polinomio, y sumamos los términos semejantes, es decir, aquellos términos que tienen la misma parte literal.

Ejemplo 1: Vamos a calcular el producto de $P(x) = 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 5$ y $Q(x) = 3 \cdot x^4 - x^2 + x$.

$$P(x) \cdot Q(x) = \dots\dots\dots$$

$$P(x) \cdot Q(x) = \dots\dots\dots$$

Quando se multiplican dos polinomios, el resultado es un polinomio. Su grado es igual a la suma de los grados de los polinomios factores, si éstos no son nulos.
Grado de $[A (x) \cdot B (x)] = \text{Grado de } A (x) + \text{Grado de } B (x)$

Actividades

1) Dados los polinomios $E(x) = 3 \cdot x^5 + 6 \cdot x^3 - x^2 + x$, $F(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 3$ y $G(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x$, calcula:

a) $E(x) \cdot F(x)$

b) $2 \cdot F(x) \cdot G(x)$

c) $\frac{E(x) \cdot G(x)}{2}$

2) Determina el grado, el coeficiente principal y el término independiente del polinomio $Z(x)$, sabiendo que:



- $Z(x) = V(x) \cdot W(x)$.
- $V(x) = x^3 + 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 6$
- $W(x)$ es un polinomio de grado 6, coeficiente principal -2 y término independiente 0.

3) Encuentra el valor de a para que el producto de $P(x) = x^3 + a \cdot x + 1$ y $Q(x) = x^2 + 5$ sea $P(x) \cdot Q(x) = x^5 + 2 \cdot x^3 + x^2 - 15 \cdot x + 5$

4) Teniendo en cuenta que: $A(x) = -2 \cdot x^4 - 5 + 7 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3$, $B(x) = 3 \cdot x + 1$, $C(x) = 2 \cdot x^5 + 3 \cdot x^3$ y $D(x) = 1 + 2 \cdot x^5 - 3 \cdot x^2$, halla los resultados de:

- a) $3 \cdot A(x) + 2 \cdot x^3 \cdot B(x)$
 b) $[B(x)]^2 + 4 \cdot D(x) - 6 \cdot C(x)$

5) Calcula el valor de $a \in \mathfrak{R}$ para que la siguiente operación dé como resultado un polinomio cuyo grado sea par.

$$(6x^2 - ax^5 + 7x^3) \cdot [(a - 1) \cdot x^4 - x^2] - (2x^2 + ax^9 - x^8)$$

6) Halla $P(x)$ sabiendo que:

$$-3x^2 + 4x^5 - [2 \cdot P(x) - x^2] + 6x^4 \cdot 2x^3 = 0$$

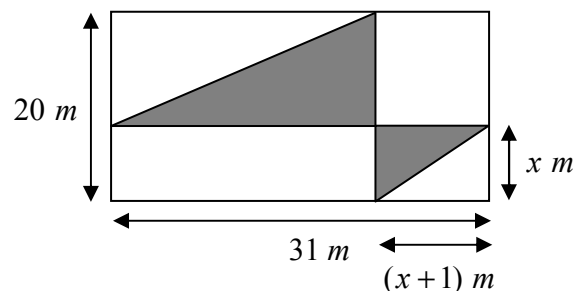
7) Germán quiere sembrar una alfombra de pasto en el fondo de su casa. Antes de pasar por la semillería, debe determinar la cantidad de metros cuadrados y calcular el dinero que necesitará para realizar el sembrado.

En la figura se puede observar una representación del patio trasero y, sombreado, el espacio a sembrar.

a) ¿Cuál es la expresión polinómica que permite calcular la superficie a sembrar?

b) ¿Cuánto dinero necesitará Germán si $x = 7$ y el m^2 de pasto vale \$4?

c) ¿Cuánto debiera valer x si se desean gastar \$810?



8) Se desea construir un tanque de forma cilíndrica, cuya altura sea tres veces el radio.

a) ¿Cuál es la expresión polinómica que permite determinar el volumen en función del radio?

b) ¿Cuánto debe valer el radio para que el volumen sea de 1600 litros?

c) Determinar nuevamente la expresión polinómica que representa el volumen si se aumenta el radio del tanque en dos metros.



F(x) =

Hacemos la división:

+	$9x^5 - 6x^4 + 3x^3$	$-3x$
	/	
+		
	/	
+		
	/	
+		
	/	

En este ejemplo, según el algoritmo de la división entera, podemos escribir la siguiente igualdad:

..... - 12 =

Actividades

1) Calcula el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(-2 \cdot x^6 - 2 + 4 \cdot x^5 - 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x + 8 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2) \div (-2 \cdot x^4) =$

b) $(6 \cdot x^6 - 18 + 3 \cdot x^7 - 9 \cdot x^4 - 21) \div (3 \cdot x^2) =$

2) Halla el polinomio dividendo P(x) de una división entera sabiendo que el resto R(x) = 3x - 1, el cociente C(x) = -x^2 · R(x) y el divisor Q(x) = C(x) + x^4 - 1.

3) Calcula la altura h del rectángulo sabiendo que su área es igual A(x) = 12x^5 - 10x^6 - 4x^4 - 8x^2 + 2x y su base B(x) = -4x.

Tercer caso: división entera entre dos polinomios

La división entre dos polinomios es similar a la división de un polinomio por un monomio.

Ejemplo 1: Vamos a hallar el cociente y el resto que se obtienen al realizar la siguiente división entre:



P(x) = -9 · x^2 + x^4 - 5 y Q(x) = x - 2

• En primer lugar, ordenamos y completamos el dividendo:

P(x) =, y ordenamos, si es necesario, el divisor Q(x) =

Handwritten division layout showing the polynomial P(x) = x^4 - 9x^2 - 5 divided by Q(x) = x - 2. The layout includes a long division symbol with the divisor x-2 on the right, and several horizontal lines with slanted marks indicating the steps of the division process.

Según el algoritmo de la división, podemos escribir la siguiente igualdad:

.....

Actividades

1) Calcula el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) (7x^3 + 21x + 6x^2 + 20) ÷ (x^2 + 3) =

b) (6x^4 - 10x^3 + (23/2)x^2 - 14x) ÷ (2x - 3) =

c) (8x^9 + 12x^6 + 6x^3 + 2) ÷ (4x^6 + 1 + 4x^3) =

d) ((1/6)x^4 - (19/6)x^3 + 11x^2 + (71/2)x + 40) ÷ ((1/3)x^3 - 3x^2 - 8x - 9) =

e) (2x^4 - (12/5)x^3 - 6x^7 - 2x + (1/2)) ÷ (2x - (1/2)x^5 - 1) =

2) Resuelve (2x^5 + 8x^3 - x^6) ÷ (x^2 + 2x) = y luego escribe la expresión P(x) = Q(x) · C(x) + R(x) correspondiente.



3) Calcular la altura h de un triángulo sabiendo que su base es $B(x) = -3x^3 + 6x - 1$ y su área $A(x) = -15x^5 + 21x^3 + 18x - 5x^2 - 3$.

Raíces de un polinomio

Especialicen el siguiente polinomio para los valores indicados:

$$P(x) = x^5 - x^3 \text{ en } x = 1 \text{ y } x = -1.$$

¿Qué sucede cuando sustituimos la indeterminada por cada uno de los valores?

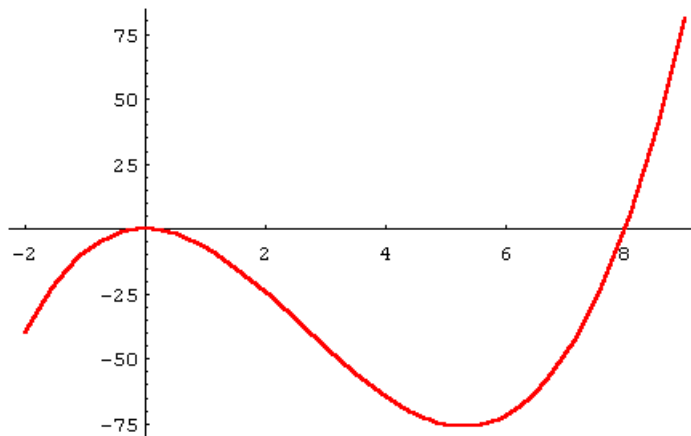
.....

Un valor de x es raíz de $P(x)$ si el polinomio se anula para ese valor.

$$x = a \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Observen el gráfico $S(x) = x^3 - 8 \cdot x^2$ con sus raíces $x = 0$ y $x = 8$. En cada raíz real, el gráfico puede atravesar el eje x ($x = \dots\dots\dots$) o sólo tocarlo ($x = \dots\dots\dots$) sin atravesarlo, es decir que rebota.

Las abscisas en las que el gráfico de la función polinómica tiene contacto con el eje x son raíces de polinomios.



Regla de Ruffini

A un matemático italiano llamado Paolo Ruffini se le atribuye la creación de una regla que nos permite, de una manera sencilla y rápida, efectuar la división entre un polinomio cualquiera $P(x)$ de grado mayor que cero y un divisor de la forma $x + a$ (polinomio mónico de grado uno).



Calcularemos la división de $P(x) = 3 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 1$ y $Q(x) = x + 2$ aplicando la regla de Ruffini. Para ello hay que escribir los coeficientes del dividendo, **ordenado y completo hasta el término independiente**. Con respecto al divisor, sólo se escribe su **raíz**.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & & & \end{array}$$

Veamos, cómo se obtienen los demás coeficientes:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & & & \dots\dots\dots \\ \hline & & & & \dots\dots\dots \end{array}$$

El resto es **-9**. Los valores **3**, **1** y **4** son los coeficientes del cociente: $C(x) = \dots\dots\dots$, cuyo grado es una unidad menor que el del polinomio dividiendo.

Actividades

1) Realiza las siguientes divisiones enteras de polinomios empleando la regla de Ruffini:

a) $(x^4 - 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 8) \div (x - 4) =$

b) $(2 \cdot x^5 + x^3 + 6 \cdot x^2 - 2 \cdot x) \div (x - 3) =$

c) $(3 \cdot x^7 - 4 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 - x + 9) \div (x + 2) =$

2) Al dividir $P(x) = 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + a$ por $Q(x) = x - 3$, se obtuvo 10 como resto. Halla el término independiente de $P(x)$.

3) El resto de dividir $A(x)$ por $B(x)$ es igual a 32. Hallen el valor de $a \in \mathfrak{R}$ si $A(x) = x^2 + 3 \cdot x - a^2 \cdot x^3$ y $B(x) = x + 2$.

4) Encuentren los valores de $a \in \mathfrak{R}$ y $b \in \mathfrak{R}$, sabiendo que al dividir $P(x) = 5 \cdot x^4 + a \cdot x^2 - b \cdot x - 16$ por $Q(x) = x + 2$ da un resto de 96 y que $P(2) = 56$.



5) Sabiendo que 3 es raíz de $K(x)$ y que el resto de dividir $K(x)$ por $x-1$ es -90, encuentren los valores de $a \in \mathfrak{R}$ y $b \in \mathfrak{R}$ si $K(x) = x^4 + 5 \cdot x^3 - (a-6) \cdot x^2 - (36+b) \cdot x - 48$.

Divisibilidad de polinomios

Si al realizar la división entera entre $P(x)$ y $Q(x)$ el resto es nulo, decimos que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$. En ese caso podemos expresar $P(x)$ como:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x)$$

Si a es raíz del polinomio $P(x)$, entonces el resto de la división entre $P(x)$ y $(x-a)$ es cero.

Si a es raíz de $P(x)$, es decir, si $P(a) = 0 \Rightarrow P(x)$ es por $(x-a)$.

Actividades

1) El polinomio $T(x) = 2x^2 + 3ax - 4a$ es divisible por $U(x) = x - 4$. Halla el valor de $a \in \mathfrak{R}$ para que eso sea posible.

2) Hallar el valor de k para que el polinomio $G(x) = (3+k) \cdot x^2 + k^2 \cdot x - 5$ sea divisible por $S(x) = x - 1$.

3) Determinar los valores de $a \in \mathfrak{R}$ y $b \in \mathfrak{R}$, sabiendo que $P(x) = 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x - 8$ es divisible por $x - 1$ y que al dividirlo por $x - 2$ da resto 4.