Factorización de polinomios

Cajas de igual volumen

En una fábrica de chocolates, se decidió envasar los bombones en dos modelos de cajas cuyos volúmenes sean iguales. Una de ellas debe ser un cubo. La otra, un prisma, cuyo ancho sea igual al del cubo, su profundidad sea el doble, y su altura, 4 cm menor.

¿Cómo podemos hallar las medidas exactas de cada una de estas cajas?¿Qué ecuaciones podríamos plantear?

Completamos la tabla con la información que disponemos:

Modelo	*Ancho*	*Profundidad*	*Altura*	*Volumen*
Cubo				
Prisma				

Cada uno de los volúmenes es un polinomio de grado ------------------.

Hallemos los valores de ***x*** para los cuales ambos volúmenes son iguales.

$$V_{cubo} = V_{prisma}$$

Los valores de ***x*** que igualan los volúmenes son los mismos que anulan el polinomio $x^3 - 8x^2$.

Sabemos que los valores de x que anulan un polinomio son sus raíces, busquemos entonces, las raíces de $P(x) = x^3 - 8x^2$.

Una forma eficaz de hallar las raíces de $P(x) = x^3 - 8x^2$ es expresándolo como producto de otros polinomios.

Como los dos términos de $P(x)$ contienen un facto común, que es x^2, lo extraemos:

$$P(x) = x^3 - 8x^2 = x^2 \cdot (x - 8)$$

Entonces:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 8x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x - 8)$$

Como nos quedó el producto de dos factores igualado a 0, necesariamente uno de ellos debe ser nulo: $x^2 = 0$ o $x - 8 = 0$; entonces ***x =***------ y ***x =***------ son las raíces de $P(x)$ y, a la vez, son los valores que hacen que los volúmenes sean iguales.

Si ***x =***------ , los volúmenes dan------ , y esa solución no nos sirve.

Si ***x*** = ______ , tenemos que:

$$V_{cubo} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$V_{prisma} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Conclusión: En esa fábrica deben armar un modelo de caja que sea un cubo de ______ de arista, y otro que sea un prisma de ______ de frente, ______ de profundidad y ______ de alto. Así, ambas cajas tendrán el mismo volumen, que será de ______ .

<u>Teorema fundamental del álgebra</u>

Recordemos que un valor de ***x*** es raíz de $P(x)$ si el polinomio se anula para ese valor. Además, si $P(x)$ está expresado como producto de otros polinomios, las raíces de éstos son las raíces de $P(x)$.

Observen los siguientes ejemplos:

Polinomio factorizado	*Raíces reales*	*Cantidad de raíces reales*
$P(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$	***x = 1; x = 2; x = -3***	Tres
$Q(x) = (x-7)\cdot(x-4)^2$	***x = 7; x = 4***	Tres
$R(x) = (x-5)^3$	***x = 5***	Tres
$S(x) = (x-8)\cdot(x^2+1)$	***x = 8***	Una

Si al escribir un polinomio como producto hay más de un factor que tiene la misma raíz, a ésta se la llama ***raíz múltiple***. Por eso, ***x = 4*** es una ***raíz doble*** de $Q(x)$ y ***x = -5*** es una ***raíz triple*** de $R(x)$.

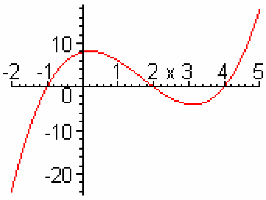
En la tabla anterior figuran las raíces reales, pero un polinomio puede tener raíces ***reales*** y ***no reales***. Existe un teorema, llamado ***<u>teorema fundamental del álgebra</u>***, a partir del cual podemos afirmar que ***un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces***, considerando las reales y las no reales.

Otra consecuencia de este teorema es la siguiente:

Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales

Las raíces no reales siempre vienen en parejas. Por eso, un polinomio de grado tres puede tener una raíz real y dos raíces ____________ , o bien, tener tres raíces ____________ .

Actividades



1) Dada la siguiente gráfica:

a) Indiquen las raíces de $P(x)$.

b) ¿Cuál es el mínimo grado posible de $P(x)$?

2) ¿Es posible que un polinomio de grado cinco tenga exactamente cuatro raíces reales?

3) Indique si es cierto que todas las raíces de un polinomio de grado par pueden ser no reales.

4) Indicar la multiplicidad de las raíces de los siguientes polinomios.

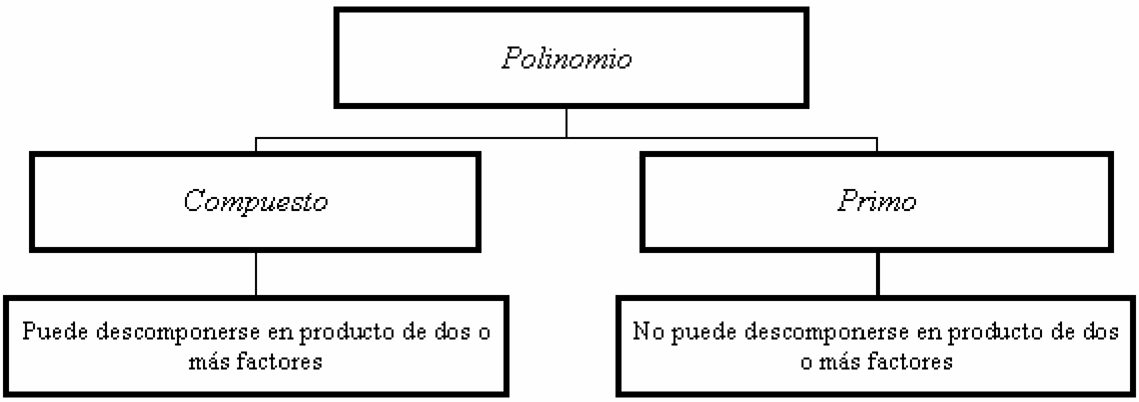
a) $P_1(x) = -4 \cdot (x-3)^2 \cdot (x+3)^2$

b) $P_2(x) = 2 \cdot (x+1)^5 \cdot x^2$

Polinomios expresados como productos

En el problema inicial vimos que era más conveniente expresar la ecuación mediante el producto $0 = x^2 \cdot (x-8)$, ya que como el polinomio se anula cuando alguno de sus factores es 0, ***es más sencillo averiguar las raíces de cada factor que las raíces del polinomio original***.

De la misma forma en que descomponemos un número entero en producto de sus factores primos, podemos descomponer un polinomio compuesto en producto de polinomios primos.



Son primos únicamente los polinomios de grado uno y los de grado dos sin raíces reales. Por ejemplo, son primos: $P(x) = -3 \cdot x + 6$ y $R(x) = x^2 + 4$.

Ahora vamos a aprender algunas técnicas para expresar un polinomio como producto.

Factor común

A veces sucede que en un polinomio $P(x)$ la variable $\boldsymbol{x}$ figura en todos los términos. En estos casos es muy conveniente extraer factor común.

Observen cómo extraemos la variable x como factor común: ***la extraemos elevada a la menor de sus potencias***. También podemos extraer un número que es factor en todos los coeficientes. Después dividimos cada término del polinomio por el factor.

Ejemplos:

$Q(x) = 7 \cdot x^5 + 4 \cdot x^4 - x^3 =$ ________________________.

$F(x) = 24 \cdot x^4 - 8 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 =$ ________________________.

Siempre podemos controlar que el producto que obtuvimos es correcto aplicando propiedad distributiva.

El factor común puede ser la variable del polinomio elevada a la menor potencia, y/o el d.c.m. de todos los coeficientes del mismo

Factor común por grupos

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

Ejemplo: $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x + 6$

Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que en cada uno de ellos haya un factor común.

$P(x) =$ __________________

En cada término debe aparecer el mismo factor para poder extraerlo nuevamente como factor común.

$P(x) =$ __________________

Al sacar nuevamente todo el paréntesis como factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

$P(x) =$ __________________

Observación: la forma de agrupación no es única.

Diferencia de cuadrados

Así como el producto de la diferencia de dos monomios por su suma es igual a la diferencia de los cuadrados de ambos monomios, del mismo modo, la diferencia de los cuadrados de dos monomios se puede factorizar como el producto de la diferencia de ambos por su suma.

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

Ejemplos:

$Q(x) = 64x^2 - 25 =$ ________________________

$F(x) = x^4 - 16 =$ ________________________

Actividades.

1) Expresen los siguientes polinomios como producto.

a) $M(x) = 24a^2x^5 + 18a^3x^4 - 30ax^2$

b) $L(x) = 4ax^3 - 2bx^2 + 6ax - 3b$

c) $P(x) = \frac{25}{4}a^2x^2 - \frac{9}{16}$

d) $V(x) = 81x^4 - 16a^4$

e) $J(x) = 2ax^5 - bx^4 + 6ax^3 - 3bx^2 + 8ax - 4b$

f) $F(x) = 3bx^3 - 12by^2x$

g) $W(x) = -yx + yx^6 + yx^5 - ax^5 - ax^4 + a$

h) $H(x) = 2bx^6 - 2bx^4 - 2bx^2 + 2b$

i) $C(x) = 5yx^8 + 10y^4x^5 + \frac{5}{2}y^3x^2$

j) $B(x) = ax^6 + 2ax^5 + ax^4 + 2ax^3 + 2ax + 4a$

k) $G(x) = x^6 - 9\cdot x^4 - 256\cdot x^2 + 2304$

l) $N(x) = -\frac{81}{a^4}x^2 + x^4$

m) $M(x) = 6yx^5 + 3ybx^4 + yx^3 - ybx^2 - yx$

n) $A(x) = 5yx^4 - 80y$

o) $Y(x) = 6a^5b^4x^5 + 9a^4b^3x^3 - 12a^4b^3x^2$

p) $S(x) = 3x^5 + \frac{1}{3}y^2x^3 - yx^4 - 6y^3x^2 - \frac{2}{3}y^5 + 2y^4x$

q) $I(x) = (a-2x)^2 - (a+2x)^2$

r) $H(x) = 2abx^3 - ba + 2a^2x^2 - b^2x$

s) $O(x) = \frac{1}{2}ax^3 + \frac{3}{2}a^2x^2 - \frac{1}{2}a^3x$

Trinomio cuadrado perfecto

Analicemos el resultado de elevar un binomio al cuadrado.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$

Al desarrollar estas expresiones siempre obtenemos dos términos cuadráticos y un término que es el doble producto de los dos términos que constituyen el binomio. Expresiones de este tipo reciben el nombre de ***trinomio cuadrado perfecto***.

Para que un polinomio sea un trinomio cuadrado perfecto, es necesario verificar:

• el grado del polinomio debe ser par.

• dos de los términos deben ser cuadrados perfectos.

• el término restante debe ser el doble producto de los términos que constituyen el binomio.

Ejemplos:

$F(x) = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1 =$ ________________________.

$F(x) = \frac{1}{81} \cdot x^4 + \frac{2}{3} \cdot x^2 + 9 =$ ________________________.

Actividades

1) Indiquen cuáles de los siguientes trinomios son cuadrados perfectos. En caso afirmativo factorizarlos.

a) $C(x) = 4b^2x^6 + \frac{4}{5}b^3x^4 + \frac{1}{25}b^4x^2$

b) $A(x) = \frac{36}{25}a^4b^6x^6 + 6a^3b^3x^3y^2 + \frac{25}{4}a^2y^4$

c) $B(x) = \frac{16}{9}m^4y^6x^2 - \frac{8}{5}m^2y^2n^4z^2x + \frac{9}{25}n^8z^4$

d) $D(x) = \frac{1}{4}m^4x^2 - \frac{1}{7}m^2x^5y^6 + \frac{1}{49}x^8y^{12}$

e) $F(x) = 9m^2x^4 - \frac{9}{5}m\,x^2y^2 + \frac{9}{100}y^4$

2) Determinen el valor de *h* de modo que el trinomio sea el desarrollo del cuadrado de un binomio.

a) $2h + \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}ax =$

b) $4a^2x^2 + h - 4axc =$

c) $\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{16}x^2 + hx =$

d) $0{,}81a^4 + ha^2x + 0{,}49x^2 =$

e) $h^2 + 10 \cdot (2x + 1) + 25 =$

Cuatrinomio cubo perfecto

Analicemos el resultado de elevar el cubo de un binomio.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

Al desarrollar estas expresiones siempre obtenemos dos términos cúbicos y dos términos que son el triple producto de uno de los términos que constituyen el binomio elevado al cuadrado por el otro sin elevar. Expresiones de este tipo reciben el nombre de ***cuatrinomio cubo perfecto***.

Para que un polinomio sea un cuadrinomio cubo perfecto, es necesario verificar:

- dos de los términos deben ser cubos perfectos.
- los dos términos restantes deben ser el triple producto de uno de los términos que constituyen el binomio elevado al cuadrado por el otro sin elevar.

Ejemplos:

$M(x) = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8 =$ _.

$H(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1 =$ _.

Actividades

1) Indiquen cuáles de los siguientes cuatrinomios son cubos perfectos. En caso afirmativo factorizarlos.

a) $A(x) = -8x^3 + 36x^2b - 54xb^2 + 27b^3$

b) $Z(x) = a^3x^6 + 3a^2bnx^4 + 3ax^2bn^2 + b^3n^3$

c) $B(x) = \frac{1}{8}x^3a^6 + \frac{3}{16}x^2b\,a^4 + \frac{3}{32}xa^2b^2 + \frac{1}{64}b^3$

d) $C(x) = \frac{1}{125}a^3b^3x^9 - \frac{9}{50}a^2b^3\,x^7 + \frac{27}{20}ab^3x^5 - \frac{27}{8}b^3x^3$

e) $H(x) = \frac{1}{64}y^6x^3 + \frac{5}{16}y^5x^2 - \frac{25}{12}y^4x + \frac{125}{27}y^3$

Suma y resta de potencias de igual exponente

Para un polinomio de la forma $P(x) = x^n + a^n$ ó $P(x) = x^n - a^n$ existen cuatro posibilidades:

$P(x) = x^n + a^n \qquad P(x) = x^n - a^n$ con n par

$P(x) = x^n + a^n \qquad P(x) = x^n - a^n$ con n impar

1) $P(x) = x^4 - 16 = x^4 - 2^4$. Se buscan las raíces de $P(x)$. En nuestro caso:

$$x^4 - 16 = 0$$

$$x^4 = 16$$

$$|x| = 2 \Rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

Se aplica la regla de Ruffini:

$P(x) = x^4 - 16 =$ _

2) $P(x) = x^4 + 81$, no tiene raíces reales.

3) $P(x) = x^3 - 27 = x^3 - 3^3$

Se buscan las raíces de $P(x)$. En nuestro caso:

$$x^3 - 27 = 0$$

$$x^3 = 27$$

$$x = 3$$

Se aplica la regla de Ruffini:

$P(x) = x^3 - 27 =$ _

4) $P(x) = x^5 + 32 = x^5 + 2^5$

Se buscan las raíces de $P(x)$. En nuestro caso:

$$x^5 + 32 = 0$$

$$x^5 = -32$$

$$x = -2$$

Se aplica la regla de Ruffini:

$P(x) = x^5 + 32 =$ _

Actividades

1) Expresen los siguientes polinomios como producto.

a) $H(x) = \frac{16}{25} b^2 y^6 x^4 - \frac{4}{5} y^3 b x^3 + \frac{1}{4} x^2$

b) $A(x) = x^4 - \frac{b^4}{16}$

c) $Z(x) = x^7 + 128 b^7$

d) $M(x) = \frac{25}{4} a^2 x^5 - 5abx^4 + b^2 x^3$

e) $L(x) = 27a^7 x^{12} + 54a^5 x^9 + 36a^3 x^6 + 8x^3 a$

f) $W(x) = a^5 x^5 - 3125$

g) $K(x) = \frac{1}{100} x^2 + \frac{25}{4} b^2$

h) $J(x) = \frac{8}{a^3} x^{11} - \frac{24}{a^2} bx^9 + \frac{24}{a} b^2 x^7 - 8b^3 x^5$

i) $S(x) = 4x^2 - \frac{81}{49} a^2$

j) $U(x) = x^3 - 8y^3$

Raíces de polinomios con coeficientes enteros. Teorema de Gauss

Consideremos el polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$, que tiene todos sus coeficientes enteros. Calculemos $P\left(\frac{1}{2}\right)$ =___________________. Como $P\left(\frac{1}{2}\right)$ =___, resulta que $x = \frac{1}{2}$ es una raíz de $P(x)$.

Observen que esa raíz es una fracción que cumple con estas dos condiciones:

- el numerador 1 divide al término independiente 4.
- el denominador 2 divide al coeficiente principal 2.

El teorema de Gauss, que generaliza esta situación, afirma que:

Cuando una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal.

Entonces, para hallar las raíces ***racionales*** de un polinomio con coeficiente ***enteros***, se deben seguir los siguientes pasos:

- Hallar los divisores *p* del término independiente y los divisores *q* del coeficiente principal.
- Formar con ellos fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$, que son las ***posibles raíces***.
- Aplicar la regla de Ruffini para verificar si alguna es raíz del polinomio.

Ejemplo: Hallemos las raíces racionales de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

- Verificamos si todos los coeficientes de $P(x)$ son enteros.
- Hallamos los divisores *p* del término independiente: _________________
- Hallamos los divisores *q* del coeficiente principal: _________________
- Formamos todas las fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$: _________________
- Aplicamos la regla de Ruffini verificamos si alguna es raíz del polinomio.

<u>Actividades</u>

1) Hallar las raíces racionales de los siguientes polinomios:

a) $P_1(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$

b) $P_2(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

c) $P_3(x) = 2x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x$

d) $P_4(x) = 5x^3 - 20x^2 - 20x + 80$

e) $P_5(x) = 3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x$

2) El polinomio $K(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 2a$ corta el eje x en x = 2. Hallar el valor de ***a*** y las raíces reales de $K(x)$.

3) Expresar los siguientes polinomios en función de sus raíces.

a) $P_1(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$

b) $P_2(x) = 6x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 12x$

c) $P_3(x) = 2x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 12x - 4$

c) $P_4(x) = -3x^4 - 9x^2 + 12x^3 - 12x + 12$

d) $P_5(x) = x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 48x^2$

e) $P_6(x) = -2x^5 + 28x^3 - 24x^2 - 26x + 24$

4) Se aplicó la Regla de Ruffini a un polinomio $W(x)$ de grado tres. Determinar el valor de ***a*** y factorizar el polinomio $W(x)$ teniendo en cuenta sus raíces.

	2	-2	-20	-16
a		8	24	16
	2	6	4	/

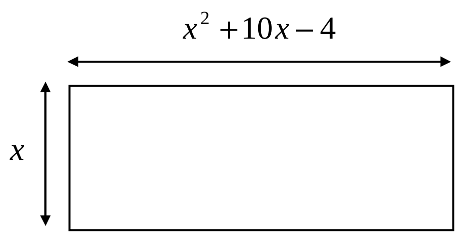
5) Usar la factorización de polinomios para resolver las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{2x^3 + 12x^2 + 2x}{2} = -6$

b) $12x^3 - 3x = (5 - x)^2 + 10x \cdot \left(1 + \dfrac{3}{10}x\right) - 26$

c) $5x \cdot (x - 1) = 6 - 2 \cdot (4x^3 - 1)$

6) Calcular la longitud de cada uno de los lados sabiendo que estos están expresados en cm.



Área = 40 cm^2

7) Factorizar los siguientes polinomios aplicando los distintos casos estudiados.

a) $P_1(x) = 2x^5 - 20x^4 + 50x^3$

b) $P_2(x) = 16x^3 - 16x^2 - 64x + 64$

c) $P_3(x) = x^5 + 11x^3 - 6x^4 - 2x^2 - 12x + 8$

d) $P_4(x) = 2x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 16x$

e) $P_5(x) = 6x^9 - 384x^3$

f) $P_6(x) = -x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 10x - 8$