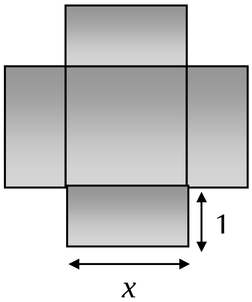
Operaciones con polinomios

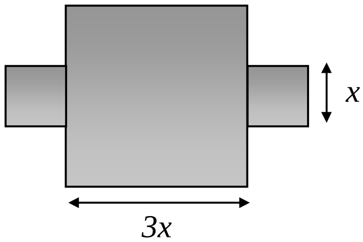
1)

a) Determina la función polinómica que representa la superficie de las figuras.

b) Calcula la superficie para cada figura si x = 3 cm y x = 3/4 cm.

c) Imagina que armas una caja con las figuras, ¿cuál es la función polinómica que representa el volumen?





2) Determina ***a***, ***b***, ***c*** y ***d*** sabiendo que:

$$3 + 4x + 5x^2 + 7x^3 = \mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) x + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) x^2 + \mathbf{d}\, x^3$$

3) Halla el valor de $\mathbf{a} \in \Re$ para que la siguiente operación dé como resultado un polinomio de grado cuatro:

$$(3x^4 - 8\mathbf{a}x^5 + 4x^3) - (2x^5 - \mathbf{a}x^3) - (2x^2 + \mathbf{a}x^5 - 7x^4)$$

4) Calcula la función polinómica que representa:

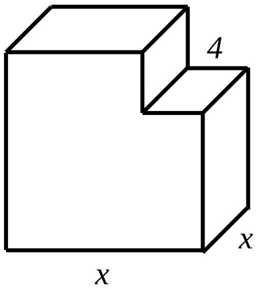
a) El volumen y la superficie total del cuerpo.

b) Calcula:

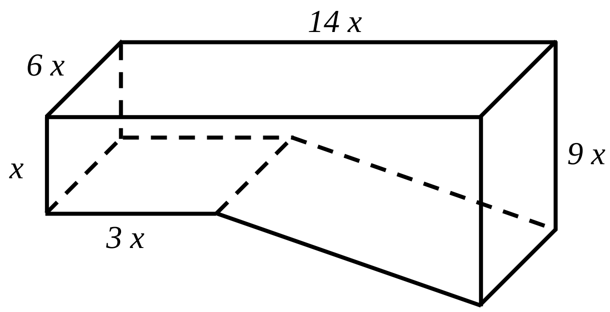
$V (5) =$ .... $S (5) =$ ....

$V (2) =$ .... $S (2) =$ ....

¿Son todos los valores de *x* posibles? ¿Por qué?



5) ¿Cuál es la función polinómica que determina el volumen de una pileta de natación como la que aparece en esta figura?



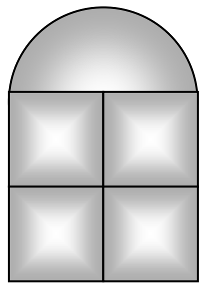
6) Calcula el valor de $\boldsymbol{a} \in \Re$ para que la siguiente operación dé como resultado un polinomio cuyo grado sea par.

$$(6x^2 - \boldsymbol{a}x^5 + 7x^3) . [(\boldsymbol{a} - 1). x^4 - x^2] - (2x^2 + \boldsymbol{a}x^9 - x^8)$$

7) Halla P (x) sabiendo que:

$$-3x^2 + 4x^5 - [2 . \boldsymbol{P(x)} - x^2] + 6x^4 . 2x^3 = 0$$

8) Halla la superficie de vidrio (en función del lado del cuadrado) que es necesaria para una ventana que tiene forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. ¿Cuánto cuesta vidriar la ventana, si el precio del metro cuadrado de vidrio es de $10?



División entera de polinomios

Recordemos, para empezar, cómo resolvemos una división entera:

a: dividendo
b: divisor
c: cociente
r: resto

$$\begin{array}{l|l} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \hline & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{r} & \end{array}$$

donde ***a = b . c + r*** y además el resto cumple la siguiente condición: $\boldsymbol{0 \le r < b}$.

De la misma manera, dados un polinomio *P (x)* ***(dividendo)*** y otro *Q (x)* ***(divisor)***, trataremos de determinar, cuando sea posible, dos polinomios *C (x)* ***(cociente)*** y *R (x)* ***(resto)*** que cumplan con las siguientes condiciones:

$$\boldsymbol{P (x) = Q (x) . C (x) + R (x)}$$

y ***gr R (x) < gr Q (x)*** o bien *R (x)* es el polinomio ***nulo***.

Antes de aprender cómo se aplica el algoritmo de la división entera de polinomios, observen las siguientes características:

- El divisor no puede ser el .... nulo.
- Si el dividendo es el polinomio nulo o su grado es menor que el del divisor, el cociente es el polinomio nulo y el resto es el polinomio ....

Primer caso: división de un monomio por otro monomio

Observen cómo calculamos esta división:

$$8x^7 : (-2x^5) = [\,8 : (-2)\,] \,.\, [\,x^7 : x^5\,] = -4x^2$$

Obtuvimos como ***resto*** el polinomio nulo y, como ***cociente***, un monomio, cuyo coeficiente es el .... de los coeficientes del dividendo y del divisor, y cuyo grado es la .... entre los grados del dividendo y del divisor.

Segundo caso: división entera de un polinomio por un monomio

Hallaremos el cociente y el resto de la división entre:

$$F(x) = -6x^4 + 9x^5 - 12 + 3x^2 \text{ y } G(x) = -3x$$

En primer lugar, ordenamos y completamos el dividendo:

$F(x) =$ ....

Hacemos la división:

$$
\begin{array}{l|l}
9x^5 - 6x^4 + 0\,x^3 \text{ ....} & -3x \\ \hline
+ \text{ .....} & \text{.............................} \\ \hline
\quad \text{.............................} & \\
+ \quad \text{.....} & \\ \hline
\quad\quad \text{..................} & \\
+ \quad\quad \text{.....} & \\ \hline
\quad\quad\quad \text{............} & \\
+ \quad\quad\quad \text{.....} & \\ \hline
\quad\quad\quad\quad \text{........} &
\end{array}
$$

En este ejemplo, según el algoritmo de la división entera, podemos escribir la siguiente igualdad:

.... -12 = ...

Actividades

1) Calcula el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(-2x^6 + 4x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 4x - 2) : (2x^2) =$

b) $(6x^6 - 18 + 3x^7 - 21 -9x^4) : (3x^2) =$

2) Hallar el polinomio dividendo $P(x)$ de una división entera sabiendo que el resto $R(x) = 3x - 1$, el cociente $C(x) = -x^2 \cdot R(x)$ y el divisor $Q(x) = C(x) + x^4 - 1$.

3) Calcular la altura h del rectángulo sabiendo que su área es igual $A(x) = 12x^5 - 10x^6 - 4x^4 - 8x^2 + 2x$ y su base $B(x) = -4x$.

Tercer caso: división entera entre dos polinomios

La división entre dos polinomios es similar a la división de un polinomio por un monomio. Vamos a hallar el cociente y el resto que se obtienen al realizar la siguiente división entre:

$$P (x) = 10x^4 - 2x^3 - 8x^5 +12 x + 5x^2 + 3 \text{ y } Q (x) = 3x + 2x^2 + 1$$

• En primer lugar, ordenamos y completamos el dividendo:

$P (x) =$ .... , y ordenamos el divisor:

$Q (x) =$ ....

$$\begin{array}{r|l} -8x^5 + 10x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 12 x +3 & 2x^2 + 3x +1 \\ \hline + \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline / \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \hline / \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + \;\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \hline / \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + \;\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \hline / \quad \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Según el algoritmo de la división, podemos escribir la siguiente igualdad:

-.

Actividades

1) Calcula el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(7x^3 + 21x + 6x^2 + 20) \div (x^2 + 3) =$

b) $\left(6x^4 - 10x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 14x\right) \div (2x - 3) =$

c) $(8x^9 + 12x^6 + 6x^3 + 2) \div (4x^6 + 1 + 4x^3) =$

d) $\left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{19}{6}x^3 + 11x^2 + \frac{71}{2}x + 40\right) \div \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 8x - 9\right) =$

e) $\left(2x^4 - \frac{12}{5}x^3 - 6x^7 - 2x + \frac{1}{2}\right) \div \left(2x - \frac{1}{2}x^5 - 1\right) =$

2) Resuelve $(2x^5 + 8x^3 - x^6) \div (x^2 + 2x) =$ y luego escribe la expresión $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ correspondiente.

3) Calcular la altura ***h*** de un rectángulo sabiendo que su base es $B(x) = -3x^3 + 6x - 1$ y su área $A(x) = -15x^5 + 21x^3 + 18x - 5x^2 - 3$.

Raíces de un polinomio

Especialicen el siguiente polinomio para los valore indicados:

P (x) = $x^5 - x^3$ *en x = 1 y x = -1*

¿Qué sucede cuando sustituimos la indeterminada por cada uno de los valores?

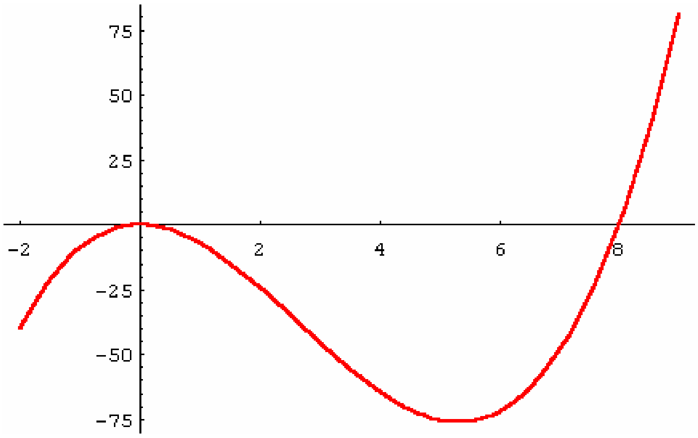
-.

Un valor de x es raíz de P(x) si el polinomio se anula para ese valor.

x = a es raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ ***P (a) = 0***

Observen el gráfico *S (x) =* $x^3 - 8x^2$ con sus raíces *x = 0* y *x = 8*. En cada raíz real, el gráfico puede atravesar el eje x (*x =* _._._._) o sólo tocarlo (*x =* _._._._) sin atravesarlo, es decir que rebota.

Las abscisas en las que el gráfico de la función polinómica tiene contacto con el eje x son raíces de polinomios.



Regla de Ruffini

A un matemático italiano llamado Paolo Ruffini se le atribuye la creación de una regla que nos permite, de una manera sencilla y rápida, efectuar la división entre un polinomio cualquiera $P(x)$ de grado mayor que cero y un divisor de la forma $x + a$ (polinomio mónico de grado uno).

Calcularemos la división de $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ y $Q(x) = x + 2$ aplicando la regla de Ruffini. Para ello hay que escribir los coeficientes del dividendo, ***ordenado*** y ***completo hasta el término independiente***. Con respecto al divisor, sólo se escribe su ***raíz***. (en este ejemplo es -2).

	3	**7**	**6**	**-1**
-2				

Veamos, cómo se obtienen los demás coeficientes:

	3	**7**	**6**	**-1**
-2				

El resto es **-9**. Los valores **3**, **1** y **4** son los coeficientes del cociente: $C(x) = 3x^2 + 1x + 4$, cuyo grado es una unidad menor que el del polinomio dividiendo.

Según el algoritmo de la división, podemos escribir:

$3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ = (_._._._._._._._._) . (_._._._._._._._._) +_._._.

Actividades

1) Realiza las siguientes divisiones enteras de polinomios empleando la regla de Ruffini:

a) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 8) : (x - 4)$

b) $(2x^5 + x^3 + 6x^2 - 2x) : (x - 3)$

c) $(3x^7 - 4x^4 + 5x^3 - x + 9) : (x + 2)$

2) Al dividir $P (x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + \boldsymbol{a}$ por $Q (x) = x - 3$, se obtuvo 10 como resto. Halla el término independiente de P(x).

3) Al dividir P (x) = $-x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x + 7$ por Q (x) se obtuvo 4 como resto. Justifica si el divisor pudo haber sido Q (x) = x - 3

4) Calcular el valor de a para que la división entre $P(x) = x^5 - 3x^3 + 6x^2 + ax + 1$ y $Q(x) = x + 3$, tenga resto -101.

5) Al dividir $P(x) = x^3 - ax^2 + 3ax - 4$ por $R(x)$, se obtuvo como resto -67. Hallar el valor de ***a*** para que eso sea posible.

Divisibilidad de polinomios

Si al realizar la división entera entre *P (x)* y *Q (x)* el resto es nulo, decimos que *P (x)* es divisible por *Q (x)*. En ese caso podemos expresar *P (x)* como:

$$\boldsymbol{P (x) = Q (x) . C (x)}$$

Si a es raíz del polinomio P (x), entonces el resto de la división entre P (x) y (x - a) es cero.

Si ***a*** es raíz de *P (x)*, es decir, si $P (a) = 0 \Rightarrow P (x)$ es _._._._._._._ por *(x -a)*.

Actividades

1) El polinomio $T (x) = 2x^2 + 3\boldsymbol{a}x - 4\boldsymbol{a}$ es divisible por $U (x) = x - 4$. Halla el valor de ***a*** para que eso sea posible.

2) Calcular el valor de ***b*** para que $P(x) = bx^3 + x^2 - b$ sea divisible por $Q(x) = x - 5$. Encontrar el cociente de la división $P(x) \div Q(x)$.

3) El polinomio $T(x) = -2x^2 + 3x + 14$ es divisible por $U(x) = x - a$. Hallar los valores de ***a*** para que eso sea posible.