Sistemas de ecuaciones lineales

Resolver la siguiente situación problemática

En una bicicletería hay entre bicicletas y triciclos 23 vehículos. La cantidad total de ruedas es de 49. ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay?

Si llamamos x a la cantidad de bicicletas e y a la cantidad de triciclos, las condiciones del problema están dadas por:

Existen infinitos pares de valores que satisfacen la primera ecuación, es decir que su suma sea igual a 23. También son infinitos los pares de valores que cumplen con la segunda condición. Pero para poder dar solución al problema, debemos obtener los valores de x e y que satisfagan ambas ecuaciones en forma simultánea. Es decir, debemos armar un ***sistema de ecuaciones***.

Un ***sistema de ecuaciones*** es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas. La solución de un sistema de ecuaciones proporciona un valor para cada incógnita, de manera que en ninguna de las ecuaciones del sistema se llegue a una contradicción.

Existen distintos métodos para resolver sistemas de ecuaciones. A continuación, empezaremos a estudiar algunos de ellos.

Sistemas de ecuaciones de 2 x 2

Método de igualación

En un teatro hay 500 butacas entre platea y pullman. En un día de función a sala llena, se recaudaron \$22000. Si los precios de cada butaca en platea y pullman son respectivamente \$50 y \$30, ¿cuántas butacas de cada clase hay en ese teatro?

Si llamamos x al número de butacas en platea e y al número de butacas en pullman, el enunciado del problema planteado lo podemos traducir por medio del siguiente sistema de ecuaciones:

Para resolver el sistema despejaremos una misma incógnita de las dos ecuaciones, en este caso, vamos a despejar la incógnita *x*, pero puede hacerse lo mismo despejando *y*.

De la primera ecuación: --

De la segunda ecuación: --

El valor de *x* representa, en nuestro problema, el número de plateas que es el mismo para las dos ecuaciones; por lo tanto, podemos igualar los segundos miembros de las igualdades obtenidas.

Observen que hemos obtenido una ecuación con una sola incógnita que es *y*, por lo tanto, podemos hallar su valor.

Reemplazamos *y* por el valor hallado en alguna de las dos ecuaciones obtenidas al despejar *x*.

Por lo tanto, en el teatro hay---

Si al comienzo hubiéramos despejado *y* de las dos ecuaciones, hubiésemos obtenido el mismo resultado.

Método de igualación

1) Seleccionar una de las dos incógnitas.

2) Despejar la incógnita seleccionada en las dos ecuaciones.

3) Igualar las expresiones resultantes.

4) Resolver la ecuación anterior. Se obtiene el valor de la incógnita.

5) Sustitución del valor de la incógnita resuelta.

  5.1) Seleccionar una de las expresiones donde aparece la incógnita despejada.

5.2) Cambiar la aparición de la incógnita resuelta por su valor.

5.3) Realizar las operaciones correspondientes para obtener el valor de la otra incógnita.

Actividades

1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de igualación.

***a)** $\begin{cases} \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3} - 4x\right) = \frac{1}{3}y - 1 \\ 1 - \frac{2}{3}y = \frac{1}{2}(7x+3) + y + 1 \end{cases}$ $S = \{(1;-3)\}$

b) $\begin{cases} \frac{5x-10y}{13} = \frac{5}{3}(y-x) \\ \frac{10x-5y}{11} + 5 = x + y \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{19}{5};\frac{16}{5}\right)\right\}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{4}x = 1 + \frac{3}{10}y \\ \frac{13}{18} + y \cdot \left[y + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{3}{4}x + y^2 \end{cases}$ $S = \{(-2;-5)\}$

d) $\begin{cases} -12x + 24 - 2y = 2 \cdot (1-y) + 15 \\ 20 - 8y + \frac{1}{2}x = \frac{x-16}{2} \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{7}{12};\frac{7}{2}\right)\right\}$

2) La diferencia entre el precio de un libro y el de otro es de \$10 y uno cuesta las tres quintas partes de lo que cuesta el otro. ¿Cuánto cuesta cada uno?

R: uno cuesta \$15 y el otro \$25.

3) Se quiere mezclar vino de \$ 2,50 el litro con vino de \$ 7 el litro para preparar un vino de calidad intermedia. Se pretende que el precio de un tonel de 100 litros del nuevo vino sea de \$ 385. Calcular qué cantidad de cada tipo deben poner en el tonel.

R: se debe colocar 70 litros del vino más barato y 30 litros del vino más caro.

4) Hallar una fracción sabiendo que si el numerador se aumenta en 2 y el denominador en 1 se obtiene $\frac{1}{2}$, y que si el numerador se aumenta en 1 y el denominador se disminuye en 2, se obtiene $\frac{3}{5}$.

R: la fracción es 2/7.

Método de sustitución

En el estacionamiento de un supermercado hay en total 124 autos. Algunos de estos autos tiene solo dos puertas y otros tienen cuatro. La cantidad total de puertas es 416. ¿Cuántos autos de cuatro puertas y cuántos de dos puertas hay en el estacionamiento?

Si llamamos x al número de autos de cuatro puertas e y al número de autos de dos puertas, el enunciado del problema planteado lo podemos traducir por medio del siguiente sistema de ecuaciones:

Para resolver el sistema despejaremos una incógnita de laguna de las dos ecuaciones y luego, la sustituimos en la otra.

Vamos a despejar, por ejemplo, x de la primera ecuación:

Sustituiremos x en la segunda ecuación por la expresión obtenida anteriormente.

Observen que hemos obtenido una ecuación con una sola incógnita que es y, por lo tanto, podemos hallar su valor.

Sustituimos y por el valor hallado en el despeje de x hecho al comienzo.

Por lo tanto,--

Si al comienzo hubiéramos despejado y, hubiésemos obtenido el mismo resultado.

Método de sustitución

1. Elegir cualquier incógnita de una de las dos ecuaciones.
2. Despejar la incógnita seleccionada de la ecuación anterior.
3. Sustituir la incógnita despejada en la otra ecuación. El resultado es una ecuación de primer grado con una incógnita.
4. Resolver la ecuación resultante. Se obtiene el valor de la primera incógnita.
5. Sustituir el valor de la primera incógnita en el despeje realizado en el segundo paso.

Actividades

1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 25 + \frac{3}{4}y \\ y \cdot \left(\frac{3}{2} + y\right) = -9 \cdot (x+1) + y^2 \end{cases}$ $\qquad S = \left\{\left(\frac{5}{49}; -\frac{324}{49}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} \frac{4x+3y}{5} - \frac{x}{3} = -\frac{y}{3} + \frac{x}{24} \\ \frac{3x+y}{10} + \frac{1}{2} = 2x + 4y \end{cases}$ $\qquad S = \left\{\left(-\frac{112}{17}; 3\right)\right\}$

c) $\begin{cases} \frac{2x-4y}{11} = \frac{7}{2} + (y - x) \\ \frac{4x-2y}{13} + 2 = x + y \end{cases}$ $\qquad S = \left\{\left(\frac{129}{44}; -\frac{17}{660}\right)\right\}$

d) $\begin{cases} (x+y) \div \frac{4}{3} = 0 \\ -\frac{1}{4}y = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3^2}{1^0 + 2^0} - x\right) \end{cases}$ $\qquad S = \{(2; -2)\}$

2) La suma de dos números enteros es 3. El triple del mayor más el cuádruplo del consecutivo del otro da como resultado 4. ¿Cuáles son esos números?

R: los números son -9 y 12.

3) Martín es un estudiante de Agronomía y debe preparar una mezcla de avena y maíz para alimentar el ganado. Cada onza de avena contiene 4g de proteínas y 18 g de carbohidratos. Una onza de maíz contiene 3g de proteínas y 24 g de carbohidratos. Indicar cuántas onzas de cada cereal debe incluir la mezcla para cumplir con los requisitos nutricionales de 200g de proteínas y 1320g de carbohidratos por comida.

R: 20 onzas de avena y 40 onzas de maíz.

4) Los precios de un viaje aéreo, incluido el alojamiento a las Cataratas del Iguazú son $400 para una sola persona y $700 para una pareja en habitación doble. En uno de los vuelos, se recaudaron $22400 y viajaron 62 personas en total. ¿Cuántas parejas y cuántas personas solas viajaron?

R: 14 personas solas y 24 parejas.

Método de determinantes

Una compañía de aviación tiene una flota de 55 aviones, de los cuales hay 20 bimotores. Los restantes tienen tres o cuatro motores. Si en toda la flota hay 170 motores, ¿cuántos aviones de tres motores y cuántos de cuatro motores hay?

Si llamamos x al número de aviones de cuatro motores e y al número de aviones de tres motores, el enunciado del problema planteado lo podemos traducir por medio del siguiente sistema de ecuaciones:

El método de determinantes consiste en resolver un sistema de ecuaciones lineales usando, solamente, los coeficientes de las ecuaciones dados en un cierto orden. Para ello, es necesario resolver pequeños determinantes. Un determinante es una disposición de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

donde a, b, c y d son números reales.

Resolver un determinante es muy sencillo, ya que se debe multiplicar los números de la diagonal principal menos el producto de los números de la otra diagonal, que se denomina secundaria.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Para obtener el valor de las incógnitas x e y, es necesario efectuar el cociente entre dos determinantes. Los determinantes de los denominadores son iguales y se forma con los coeficientes de cada una de las incógnitas, dispuestos en dos columnas por separado.

$$D = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

Los determinantes que se colocan en los numeradores resultan de reemplazar en D los coeficientes de la incógnita que se está calculado por los términos independientes de las ecuaciones.

$$D_x = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \qquad\qquad D_y = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

Finalmente, el valor de las incógnitas se obtiene por medio del cociente entre los determinantes armados anteriormente.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} =$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} =$$

Por lo tanto,- -

D se llama determinante principal y de allí proviene el nombre del método, ya que "determina" si el sistema tiene una, infinitas o ninguna solución.

- Si $D \neq 0$, el sistema tiene solución única.

- Si $D = 0$ y el determinante del numerador es 0, el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $D = 0$ y el determinante del numerador es distinto de 0, el sistema no tiene solución.

Actividades

1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de determinantes.

a)
$$\begin{cases} x - \left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{5}y\right) = \dfrac{7}{15} + x \\ 3 \cdot \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{13}{45}x\right) + 2y = -\dfrac{2}{3}y \end{cases} \qquad S = \{(1;-1)\}$$

b)
$$\begin{cases} \dfrac{-3x+1}{-4} + 3 = \dfrac{4}{3} \cdot (x+y) - 1 \\ -3 \cdot (x+1)^2 - \dfrac{x}{2} = -x \cdot (3x+1) + y \end{cases} \qquad S = \left\{\left(-\dfrac{31}{27}; -\dfrac{179}{54}\right)\right\}$$

c) $\begin{cases} \dfrac{13}{20}x = \dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{3}{4}+y\right) \\ -\dfrac{7}{8}x + y\cdot\left(\dfrac{1}{5}+y\right) = \dfrac{3}{40}+y^2 \end{cases}$ $S = \{(-1;-4)\}$

2) Si se aumenta en 2 centímetros el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro resulta ser de 24 centímetros. Si el largo se disminuye en 2 centímetros el rectángulo se transforma en un cuadrado. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

R: 5 cm de largo y 3 cm de ancho.

3) Hallar un número natural de dos cifras sabiendo que la suma de ambas cifras es 6, y que si se cambian las cifras de lugar el número disminuye en 18 unidades.

R: el número es 42.

4) En una peña se vendía a $3 el vaso de gaseosa y $4 el vaso de cerveza y se recaudó un total de $964. Si tanto el vaso de gaseosa como el de cerveza hubieran constado $3, se hubieran recaudado $813. ¿Cuánto se hubiera recaudado si tanto el vaso de cerveza como el de gaseosa hubieran costado $4? Nota: suponer que no varían las ventas con los cambios de precios.

R: se hubiera recaudado $1084.

Método gráfico y clasificación de los sistemas de ecuaciones

Ejemplo 1: Hallar la solución analítica y gráfica del sistema de ecuaciones que se muestra a continuación.

$$\begin{cases} 3y + 6 = 4x \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema de ecuaciones por el método de igualación. Para ello, despejaremos la variable ***y*** en ambas ecuaciones.

--- (1)

--- (2)

Igualando los segundos miembros de (1) y (2) resulta:

La solución del sistema es:

Las expresiones (1) y (2) corresponden a las ecuaciones de dos rectas. Para representar cada recta, podemos utilizar su ***pendiente*** y su ***ordenada al origen***. Recordemos que el coeficiente que multiplica a la variable ***x*** es la pendiente, es decir, la inclinación, y que el término independiente es la ordenada al origen, es decir, el punto en el que la recta corta el eje ***y***.

Podemos observar, que ambas rectas se cortan en el punto de coordenadas --------- . Por lo tanto, resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas significa hallar, si es que existen, todos los puntos que tienen en común las rectas del sistema. Como en este caso, las rectas se cortan en un solo punto, se dice que el sistema es ***compatible determinado*** porque tiene ***una sola solución***.

Ejemplo 2: Resolver el siguiente sistema y graficar las rectas correspondientes.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2}y \\ y + 2 - x = 0 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema de ecuaciones por el método de igualación. Para ello, despejaremos la variable ***y*** en ambas ecuaciones.

--- (3)

--- (4)

Igualando los segundos miembros de (3) y (4) resulta:

La solución del sistema es:

Esto significa que las dos ecuaciones del sistema corresponden a la misma recta y que cada punto de esa recta es solución del sistema.

En este caso, decimos que el sistema es ***compatible indeterminado***, porque tiene ***infinitas soluciones***.

Ejemplo 3: Resolver el siguiente sistema y graficar las rectas correspondientes.

$$\begin{cases} 3x = 2 - y \\ 2y + 6x = -2 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema de ecuaciones por el método de igualación. Para ello, despejaremos la variable ***y*** en ambas ecuaciones.

--- (5)

--- (6)

Igualando los segundos miembros de (5) y (6) resulta:

Las expresiones (5) y (6) son las ecuaciones de dos rectas cuyas pendientes son iguales; por lo tanto, esas rectas son paralelas y no tienen ningún punto en común. En este caso, decimos que el sistema es ***incompatible*** porque ***no tiene solución***.

Actividades

1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método gráfico.

***a)** $\begin{cases} 3x - \frac{8}{9}y + 1 = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ y = \frac{1}{5} \cdot (3 + 2x) + \frac{4}{5}y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 \cdot (x+1) + \frac{1}{2} = -y + \frac{3}{4} \\ 7 - 2 \cdot (1 + 3x) = \frac{4y - 5}{2} \end{cases}$

2) Consideren el triángulo ABC y las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados:

$AB : y = x \qquad BC : y + 2x = 9 \qquad AC : y - 4x + 3 = 0$

a) Graficar las rectas que contienen a los lados.

b) Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo.

3) Determinar un valor de *k* para que cada sistema corresponda a la clasificación indicada.

a) $\begin{cases} y = kx + 3 \\ y + 2x = k + 5 \end{cases}$ Compatible determinado.

b) $\begin{cases} 3y + 2x = -3 \\ y = kx + 2 \end{cases}$ Incompatible.

c) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x - ky = 6 \end{cases}$ Compatible indeterminado.

4) Determinar los valor de *a* y *b* de manera que el sistema sea: $\begin{cases} 2x - 4y - 12 = 0 \\ y = ax + b \end{cases}$ incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado.

Sistemas de ecuaciones de n x n

Método de Gauss

Un alimento balanceado contiene 6g de trigo, 2g de maíz y 8g de avena. Un segundo alimento contiene 12g de trigo, 5g de maíz y 3g avena. Un tercer alimento balanceado contiene 8g de trigo, 6g de maíz y 6g de avena. ¿Cuántas unidades se deberán combinar de cada alimento para que esa nueva preparación contenga 46g de trigo, 23g de maíz y 39g de avena?

Si llamamos *x* al número de unidades del primer alimento, *y* al número de unidades del segundo alimento y *z* al del tercero, el enunciado del problema planteado lo podemos traducir por medio del siguiente sistema de ecuaciones:

El método de Gauss consiste en obtener por medio de ciertas operaciones un sistema de ecuaciones equivalente al dado, que además es triangular. Para ello, en primer lugar, es imprescindible "ordenar" el sistema ubicando en columnas distintas cada una de las incógnitas e igualando a los términos independientes.

La idea es muy simple; por ejemplo, para el caso de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se trata de obtener un sistema equivalente cuya primera ecuación tenga tres incógnitas, la segunda dos y la tercera una. De esta forma, será fácil a partir de la última ecuación y subiendo hacia arriba, calcular el valor de las tres incógnitas. A continuación, vamos a aplicar el método de Gauss para resolver la situación problemática planteada.

x	y	z	t_i

Así, el sistema equivalente triangular resultante es:

Despejando de abajo hacia arriba, el valor de cada una de las incógnitas es:

Volviendo nuevamente al problema, la cantidad de unidades de cada uno de los alimentos es:---

Actividades

1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

***a)** $\begin{cases} 5+2x-5z+x=-y \\ 2y+x+9=3z \\ -7-2x+6z=5+y \end{cases}$ $S=\{(4;-2;3)\}$

b) $\begin{cases} 2x+y-4z=-1 \\ x-y+2z=2 \\ -3x-y-z=-5 \end{cases}$ $S=\{(1;1;1)\}$

c) $\begin{cases} x+2z+y+2=0 \\ 2y+z=-4x \\ -3z+6x-y=-3 \end{cases}$ $S=\{(-1;3;-2)\}$

d) $\begin{cases} 4x-3y+z-5w=-12 \\ y-2z-x+w+3=0 \\ -5x+z-6y+2w=-5 \\ 2y+w+z+x=11 \end{cases}$ $S=\{(2;1;3;4)\}$

2) Una aleación contiene 6g de cobre, 4g de zinc y 10g de plomo. Una segunda aleación contiene 12g de cobre, 5g de zinc y 3g de plomo. Una tercera aleación contiene 8g de cobre, 6g de zinc y 6g de plomo. ¿Cuántas unidades se deberán combinar de cada aleación con el objeto de fabricar una nueva aleación que contenga 34g de cobre, 17g de zinc y 19g de plomo?

R: una unidad de la primera aleación, dos de la segunda y media unidad de la tercera.

3) La suma de los dígitos de un número de tres cifras es igual a 13. Si cambio de lugar la cifra de la unidad por la cifra de la decena el número aumenta 9 unidades, y además de sabe que la cifra de la centena es la tercera parte de la cifra de la unidad. ¿Cuál es el número de tres cifras?

R: el número es 256.