

## Fracciones simples

Es un método mediante el cual una división entre polinomios puede ser transformada en una sumatoria de fracciones compuestas de polinomios más sencillos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{A(x)} + \frac{b}{B(x)} + \frac{c}{C(x)} + \dots$$

Siendo:

- $a, b, c, \text{ etc.}$ , constantes pertenecientes al conjunto de los números reales. En casos particulares pueden ser polinomios de primer grado.
- $A(x), B(x), C(x), \text{ etc.}$ , los factores que componen a  $Q(x)$ .

El método es válido solamente cuando el polinomio numerador es menor que el polinomio denominador. De no cumplirse esta condición, se debe realizar la división por los mecanismos tradicionales, rearmar el resultado y luego aplicar el método sobre la parte fraccionaria.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \longrightarrow C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Ver ejemplos en la cartilla y el pizarrón.

### ***Procedimientos***

El método tiene tres procedimientos claramente distintos dependiendo del tipo de raíces que tenga  $Q(x)$ .

#### **Raíces reales distintas**

- Factorizar el denominador. Identificar las raíces de  $Q(x)$ . Todas deben ser números reales distintos entre sí.
- Armar las fracciones usando una constante literal (letra cuyo valor aún es desconocido) por cada factor de  $Q(x)$  encontrado.
- Realizar la sumatoria de las fracciones involucrando las constantes literales.
- Igualar el numerador obtenido al  $P(x)$  original.
- Darle valores a  $x$  para obtener distintas ecuaciones en donde las constantes literales pasan a ser las incógnitas. En este caso, los valores a optar deben ser iguales que las raíces. De esta manera se simplifica el cálculo de las constantes.
- Rearmar las fracciones usando los valores de las constantes, ahora numéricas, obtenidos.

#### **Raíces múltiples**

- Factorizar el denominador. Identificar las raíces de  $Q(x)$ . Todas deben ser números reales pero algunos pueden coincidir. Se dice que dicha raíz es múltiple o de multiplicidad doble, triple, etc, según la cantidad de veces que se repita.
- Armar las fracciones usando una constante literal por cada factor de  $Q(x)$  encontrado en el cual la raíz sea única, tal como el caso anterior.
- Para las raíces múltiples se deben armar tantas fracciones nuevas como grado tenga dicha raíz. La primera fracción usará como denominador el factor de mayor grado, mientras que en las restantes se deberá escribir los factores decreciendo en un grado por fracción. Las constantes deben ser todas distintas.
- Realizar la sumatoria de las fracciones involucrando las constantes literales.
- Igualar el numerador obtenido al  $P(x)$  original.
- Darle valores a  $x$  para obtener distintas ecuaciones en donde las constantes literales pasan a ser las incógnitas. En este caso también, los valores a optar deben ser los mismos que las raíces. De esta manera se simplifica el cálculo de las constantes. No obstante algunas constantes deberán ser calculadas a través de ecuaciones o sistema de ecuaciones. El grado del sistema de ecuaciones dependerá del número de raíces y de su respectivo grado de multiplicidad.
- Rearmar las fracciones usando los valores de las constantes, ahora numéricas, obtenidos.

#### **Raíces complejas**

- Factorizar el denominador. Identificar las raíces de  $Q(x)$ . Algunas deben ser números reales, distintos o no, pero algunas pueden ser complejos.
- Armar las fracciones usando una constante literal por cada factor de  $Q(x)$  encontrado en el cual la raíz sea única.
- Para las raíces múltiples se deben armar las fracciones de la forma descripta anteriormente.
- Para los factores de segundo grado no factorizables (con raíces complejas), se debe usar un polinomio de primer grado como numerador, en el cual el coeficiente lineal y el término independiente son constantes literales.
- Realizar la sumatoria de las fracciones involucrando las constantes literales.
- Igualar el numerador obtenido al  $P(x)$  original.
- Darle valores a  $x$  para obtener distintas ecuaciones en donde las constantes literales pasan a ser las incógnitas, y proceder tal como antes.
- Rearmar las fracciones usando los valores de las constantes, ahora numéricas, obtenidos.

**Raíces reales distintas**

$$1. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x-2}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{11/6}{x+3} + \frac{7/6}{x-3}$$

$$2. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x}{(x-1)(x^2+5x+4)} = -\frac{8}{15(x+4)} + \frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{3(x+1)}$$

$$3. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-x-2}{(x^2+x-2)x}$$

$$4. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-4}{(x^2+x)(x^2-1)}$$

**Raíces múltiples**

$$1. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$

$$2. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x^2(x-1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1}$$

$$3. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{(x^2+5x+4)(x+1)}$$

$$4. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x+1}{(x^2-3x+2)(x^2-4)}$$

**Raíces complejas**

$$1. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = -\frac{1}{4x} + \frac{x}{4(x^2+4)} + \frac{1}{x^2+4}$$

$$2. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^4-1}$$

$$3. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-2}{x^2(x^2+1)}$$

$$4. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{(x^2+5x+4)(x+1)}$$

**Caso particular  $Q(x) < P(x)$** 

$$1. \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5-1}{x(x^2+1)}$$