E.E.T Nº 6

TECNOLOGÍAS DE CONTROL

2º AÑO ELECTRÓMECANICA

DIAGRAMAS DE BLOQUES

AUTOR: Ing. Gianni H. Sparvoli
PUBLICADO EN MARZO DEL 2005

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición

A toda función del tiempo $\mathbf{g_{(t)}}$ definida para todo **t>0**, se le hace corresponder una función $\mathbf{F_{(s)}}$ de **variable compleja s** que se llama **Transformada de Laplace**. Se indica de la siguiente forma:

$$F_{(s)} = L\left\{g_{(t)}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} . g_{(t)} . dt$$

Al resolver la integral vemos que el elemento que permanece como variable es s.
Como dijimos antes la variable s es compleja y de valor s+**j**w, donde ω es la frecuencia angular de valor **2.**p.**f**.
Para nuestro análisis usaremos una tabla de transformadas la cual nos evitara en todos los casos usar la definición de la misma para resolver y calcular.

Tabla de transformadas de Laplace

f(t)	F(s)
f(t) = d(t)	**F(s) = 1**
f(t) = 1	$F(s) = \frac{1}{s}$
f(t) = t	$F(s) = \frac{1}{s^2}$
$f(t) = t^n$	$F(s) = \frac{1}{s^{n+1}}$
$f(t) = e^{-a.t}$	$F(s) = \frac{1}{s+a}$
$F(t) = t \,.\, e^{-a.t}$	$F(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$
F(t) = sen wt	$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
F(t) = cos wt	$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
$f(t) = \text{sen wt} \,.\, e^{-a.t}$	$F(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$f(t) = \text{cos wt} \,.\, e^{-a.t}$	$F(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Propiedades de la Transformada de Laplace

a) **Operador lineal:** la T.L. es un operador lineal. Siendo a y b constantes, tenemos que:

$$L\{a.g_{(t)} + b.f_{(t)}\} = \int_0^\infty e^{-st}.[a.g_{(t)} + b.f_{(t)}]dt = a.\int_0^\infty g_{(t)}.e^{-st}.dt + b.\int_0^\infty f_{(t)}.e^{-st}.dt$$

$$\boxed{\mathbf{L\{a.g_{(t)} + b.f_{(t)}\} = a.L\{g_{(t)}\} + b.L\{f_{(t)}\}}}$$

b) **1º propiedad de translación:** se demuestra que

$$L\{e^{at}.f_{(t)}\} = F_{(s-a)}$$

En efecto:

$$L\{f_{(t)}\} = \int_0^\infty e^{-st}.f_{(t)}.dt = \int_0^\infty e^{-st}.e^{at}.f_{(t)}.dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}.f_{(t)}.dt$$

c) **2º propiedad de translación:**

$$\boxed{L\{e^{at}.f_{(t)}\} = F_{(s-a)}}$$

Sea una función $g_{(t)}$ $\begin{cases} \mathbf{f(t-a)} & \forall\ t > a \\ 0 & \forall\ t < a \end{cases}$

Se puede demostrar que $\boxed{\mathbf{L\{g_{(t)}\} = e^{-sa} . F_{(s)}}}$

d) **Propiedad del cambio de escala:**

Sea $f_{(t)}$ una función, tal que $L\{f_{(t)}\} = F_{(s)}$, se demostrará que:

$$L\{f_{(a.t)}\} = \int_0^\infty e^{-st}.f_{(a.t)}.dt = F_{\left(\frac{s}{a}\right)}.\frac{1}{a}$$

Tomemos

Entonces

$$u = a.t \Rightarrow t = \frac{u}{a} \Rightarrow dt = \frac{du}{a}$$

$$L\{f_{(a.t)}\} = \int_0^\infty e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)}.f_{(u)}.d\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a}.\int_0^\infty e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)}.f_{(u)}.du$$

$$\boxed{L\{f_{(a.t)}\} = \frac{1}{a}.F_{\left(\frac{s}{a}\right)}}$$

Transformada de Laplace de la derivada de una función

Sea $f'_{(t)}$ una función seccionalmente contínua para $0 \leq t \leq N$ y su T. L. Es $L\{f_{(t)}\} = F_{(s)}$, se demostrara que:

$$L\{f'_{(t)}\} = s.F_{(s)} - f_{(0)}$$

Por definición $L\{f'_{(t)}\} = \int_0^\infty e^{-st}.f'_{(t)}.dt$ e integrando por partes se obtiene la solución.

Generalizando, para la T. L. de derivadas de funciones de orden superior tenemos que:

$$L\{f^{n}_{(t)}\} = s^n.F_{(s)} - s^{n-1}.f_{(0)} - s^{n-2}.f'_{(0)} - \ldots - s.f^{n-2}_{(0)} - f^{n-1}_{(0)}$$

Transformada de Laplace de la integral de una función

Sea $f_{(t)}$ una función tal que $L\{f_{(t)}\} = F_{(s)}$, se demostrará que $L\left\{\int_0^t f_{(u)}.du\right\} = \frac{F_{(s)}}{s}$

Sea entonces $G_{(t)} = \int_0^t f_{(u)}.du \Rightarrow G'_{(t)} = f_{(t)}$ y $G_{(0)} = 0$

Transformando en ambos miembros tenemos:

$$L\{G'_{(t)}\} = s.L\{G_{(t)}\} - G_{(0)} = s.L\{G_{(t)}\} = F_{(s)}$$

Entonces $$L\{f_{(t)}\} = L\left\{\int_0^t f_{(u)}.du\right\} = \frac{F_{(s)}}{s}$$

Transformada de Laplace de una señal periódica

Sea una señal periódica de período p, tal que $f_{(t+p)} = f_{(t)}$, tenemos entonces que:

$$L\{f_{(t)}\} = \frac{\int_0^p e^{-st}.f_{(t)}.dt}{1 - e^{-sp}}$$

La demostración no se realiza ya que involucra conceptos matemáticos no vistos

Teorema del valor inicial

Dada una función donde $L\{f'_{(t)}\} = s.F_{(s)} - f_{(0)}$

$$L\{f_{(t)}\} = F_{(s)} \Rightarrow \lim_{s \to \infty} F_{(s)} = 0$$

y considerando por definición que si

entonces tomando el límite cuando $s \rightarrow \infty$ y con la hipótesis de que $f_{(t)}$ es contínua en $t = 0$, tendremos que

$$\lim_{s\to\infty} L\{f'_{(t)}\} = \lim_{s\to\infty} [s.F_{(s)} - f_{(0)}]$$
$$0 = \lim_{s\to\infty} [s.F_{(s)}] - \lim_{t\to 0} [f_{(t)}]$$

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} [s.F_{(s)}] = \lim_{t\to o} [f_{(t)}]}$$

Sirve para determinar el valor de una función cuando $t \rightarrow 0$

Teorema del valor inicial

De la misma forma que el anterior se demuestra que:

$$\lim_{s\to 0} [s.F_{(s)}] = \lim_{t\to\infty} [f_{(t)}]$$

Función nula

Si $f_{(t)}$ es una función de t / $\forall$ t>0 $\int_0^t f_{(t)}.dt$ entonces $f_{(t)}$ se llama **función nula**

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Si consideramos la igualdad $L\{f_{(t)}\} = F_{(s)}$ entonces llamaremos a f(t) **transformada inversa de Laplace** y se expresará:

$$f_{(t)} = L^{-1}\{F_{(s)}\}$$

Donde L^{-1} se lo conoce como **operador inverso de la transformada**.

Como la transformada de una función nula es cero se deduce que para funciones distintas tenemos distintas anti transformadas, o dicho de otra forma la transformada inversa de Laplace de una función es única

Propiedades de la transformada inversa de Laplace

Todas las propiedades vistas para la trasformada de Laplace se aplican en sentido inverso para la transformada inversa de Laplace, por consiguiente todas son validas leyéndolas al revés.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

Lineales vs No lineales: la mayoría de los sistemas físicos no son lineales en varios sentidos. Pero pueden realizarse dentro de un rango estrecho de valores de las variables. Para sistemas lineales, se aplica el principio de superpo9ición.
Invariante en el tiempo vs. Variable en el tiempo: invariante es aquel en el que los parámetros no varían temporalmente. La respuesta de tal sistema es independiente del tiempo en el que se aplica la entrada. Un sistema variable es aquel en el cual los parámetros varían temporalmente, su respuesta depende del tiempo en el que se aplica la entrada
Con una entrada y una salida vs. múltiples entradas y salidas: un ej. del primero es un control de posición, donde hay un comando de entrada(posición deseada) y una salida controlada(posición de salida) y un ejemplo del segundo es un proceso de dos entradas (presión y temperatura) y dos salidas (presión y temperatura de salida).
Tiempo continuo vs. tiempo discreto: en tiempo continuo todas las variables son función de t. En tiempo discreto se abarcan una o más variables que son conocidas solo en instantes discretos de tiempo.
Parámetros concentrados vs. parámetros distribuidos: de parámetros concentrados pueden escribirse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias y de parámetros distribuidos mediante ecuaciones diferenciales parciales.
Determinísticos vs. estocásticos: es determinístico si la respuesta a la entrada es predecible y repetible. Caso contrario es estocástico.

FUNCION TRANSFERENCIA

Dado un sistema como el siguiente

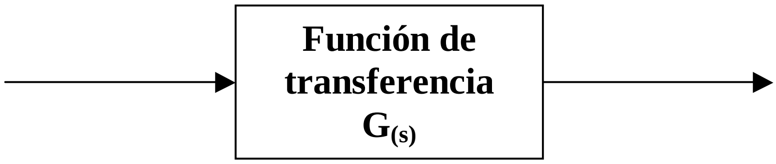
Se denomina función transferencia del sistema a la T.L. de la salida dividido la T.L. de la entrada. Para nuestro caso:

$$H_{(s)} = \frac{S_{(s)}}{E_{(s)}} = \frac{b_0.s^m + b_1.s^{m-1} + \ldots.. + b_{m-1}.s + b_m}{a_0.s^n + a_1.s^{n-1} + \ldots.. + a_{n-1}.s + a_n}$$

Se denomina ecuación característica de la función transferencia a su denominador igualado a cero. El orden del sistema queda definido por el grado del denominador (potencia más alta de s). Para nuestro caso el valor de n
La función transferencia es una propiedad del sistema, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada. Incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida, no obstante no brinda ninguna información respecto a la entrada física del sistema. Si no se conoce se puede establecer experimentalmente, introduciendo entradas conocidas y estudiando la respuesta del sistema.

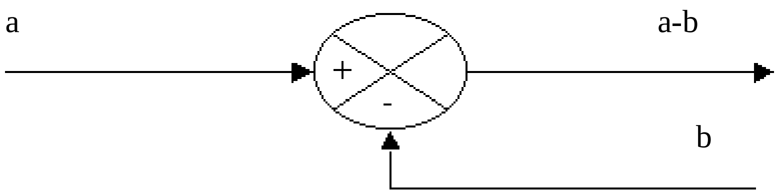
DIAGRAMA DE BLOQUES

Es una representación gráfica de las funciones analizadas por cada componente y del flujo de las señales. Tal diagrama indica las interacciones que existen entre los diversos componentes. Todas las variables del sistema se enlazan entre sí a través de bloques funcionales. El bloque funcional o bloque, es un símbolo de la operación matemática que el bloque produce a la salida, sobre la señal que tiene a la entrada.
Sobre los bloques se colocan las funciones transferencias de los componentes; los bloques están conectados por flechas para indicar la dirección del flujo de señales. La señal solo puede pasar en la dirección de las flechas.
La figura muestra un elemento del diagrama de bloques. La flecha que apunta al bloque indica



la entrada, y la que se aleja indica la salida. Tales flechas se denominan señales. Un diagrama de bloques contiene información respecto al comportamiento dinámico, pero no contiene información respecto a la constitución física del sistema.

PUNTO DE SUMA: se indica la operación suma con un circulo y una cruz, donde el signo + o - , indica la operación a realizar



PUNTO DE BIFURCACIÓN: es un punto desde el cual la señal de un bloque va concurrentemente a otros bloques o puntos suma.

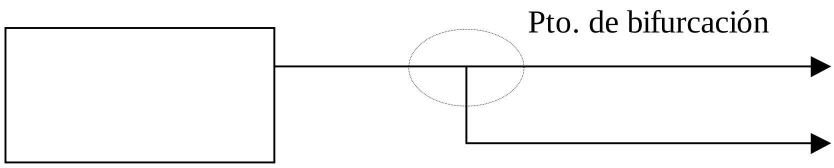
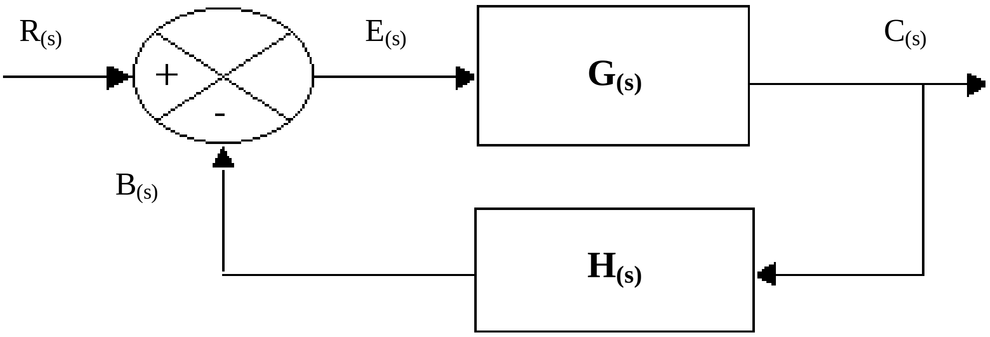


Diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado

Denominamos un sistema a lazo cerrado a todo aquel donde existe comunicación entre la salida y la entrada. En la figuramos vemos que el lazo se cierra con una realimentación que se envía desde la salida hacia el punto suma y tiene como función la de modificar la salida antes de compararla con la entrada.



Considerando que:

$$G_{(s)}.H_{(s)} = \frac{B_{(s)}}{E_{(s)}}$$

Obtenemos la FUNCION TRANSFERENCIA DIRECTA que es la relación entre $C_{(s)}$ y $E_{(s)}$. Esto es:

$$G_{(s)} = \frac{C_{(s)}}{E_{(s)}}$$

De las igualdades antes planteadas podemos obtener la FUNCION TRANSFERENCIA A LAZO CERRADO y esta vale:

$$\boxed{\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{G_{(s)}}{1+G_{(s)}H_{(s)}}}$$

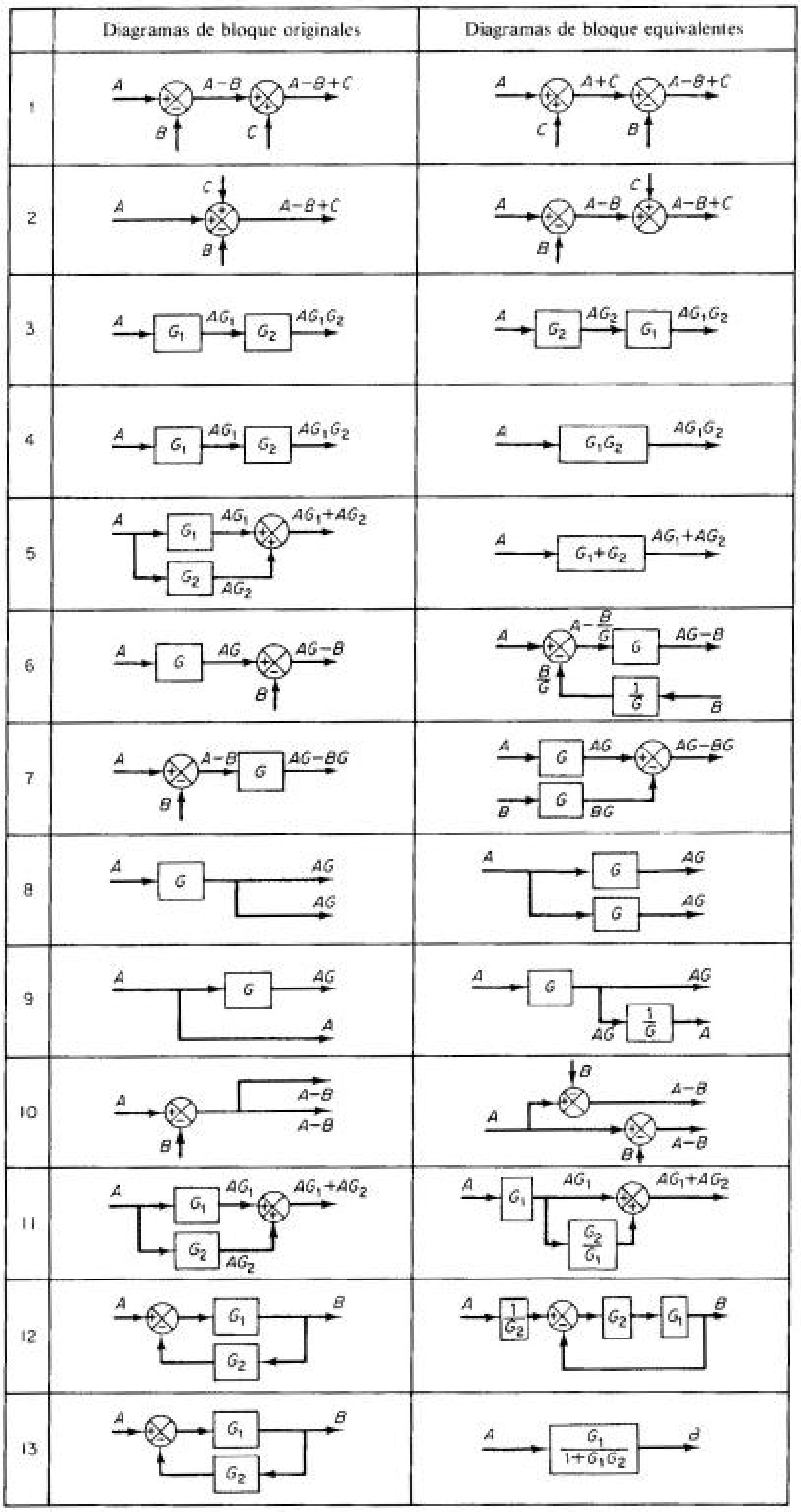
Esta función relaciona la dinámica del sistema de lazo cerrado con la dinámica de los elementos de la acción directa y de realimentación.

Procedimiento para trazar los diagramas en bloques

1) Se escriben las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de cada componente.
2) Se toman las transformadas de Laplace de estas ecuaciones suponiendo condiciones iniciales nulas y se representan individualmente en forma de bloque.
3) Se integran los elementos en un diagrama de bloques completo.

Reducción del diagrama de bloques

En la simplificación se debe recordar:
1) El producto de las funciones transferencias en sentido directo debe quedar igual.
2) El producto de las funciones transferencias alrededor del lazo debe quedar igual.



Ingenieria de control moderna