TECNOLOGÍAS DE CONTROL

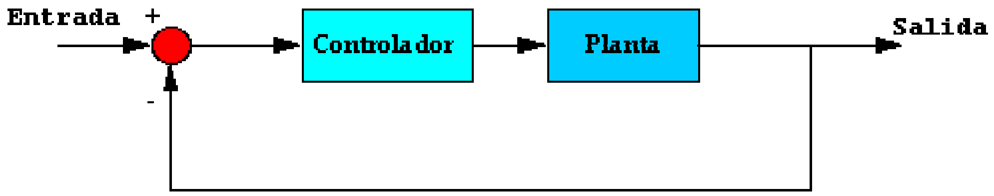
2º B

TUTORIAL PID

Publicado en Septiembre del 2007

INTRODUCCIÓN

Este tutorial le mostrará las características de los controladores proporcional (P), integral (I), y derivativo (D) , y cómo usarlos para obtener una respuesta deseada. En esta Guía, consideremos el siguiente sistema de realimentación unitaria:



Planta: sistema a controlar
Controlador: Provee la excitación de la planta; Se diseña para controlar el comportamiento de todo el sistema

La función de transferencia del controlador PID es:

$$K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

- **Kp = Ganancia Proporcional**
- **KI = Ganancia Integral**
- **Kd = Ganancia Derivativa**

Primero, echemos un vistazo a cómo trabaja el controlador PID en un sistema a lazo cerrado usando el esquema de abajo. La variable (e) representa el error de seguimiento, que es la diferencia entre el valor deseado de entrada (R) y la salida real (Y). Esta señal de error (e) será enviada al controlador PID , y éste calculará tanto la derivada cuanto la integral de esta señal de error. La señal (u) recién salida del controlador es ahora igual a la ganancia proporcional (Kp) veces la magnitud del error más la ganancia integral (Ki) veces la integral del error, más la ganancia derivativa (Kd) veces la derivada del error.

$$u = K_P e + K_I \int e\,dt + K_D \frac{de}{dt}$$

La señal (u) se enviará a la planta, y se obtendrá la nueva salida (Y). Esta nueva salida (Y) se re-enviará al sensor para hallar la nueva señal de error (e). El controlador toma esta nueva señal de error y computará su derivada y su integral otra vez. Este proceso sigue sin parar.

LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS CONTROLADORES P, I, Y D

Un controlador proporcional (Kp) tendrá el efecto de reducir el tiempo de elevación y reducirá ,sin jamás eliminar, el error de estado estacionario . Un control integral (Ki) tendrá el efecto de eliminar el error de estado estacionario, pero puede empeorar la respuesta transitoria. Un control derivativo (Kd) tendrá el efecto de incrementar la estabilidad del sistema, reduciendo el sobrepico, y mejorando la respuesta transitoria. Los efectos de cada uno de los controladores Kp, Kd, y Ki en un sistema a lazo cerrado se resumen en la tabla de abajo.

Rta a L Cerrado	T.TREPADA	SOBREPICO	T Establecim.	ERROR (SS)
Kp	Baja	Sube	Poco Cambio	Baja
Ki	Baja	Sube	Sube	Elimina
Kd	Poco Cambio	Baja	Baja	Poco Cambio

Note que estas correlaciones podrían no ser exactamente seguras, porque Kp, Ki, y Kd son dependientes entre sí. De hecho, cambiando una de estas variables se puede variar el efecto de las otras dos. Por esta razón, la tabla deberá usarse únicamente como referencia cuando se determina los valores de Ki, Kp y Kd.

SUGERENCIAS GENERALES PARA EL DISEÑO DEL CONTROLADOR PID

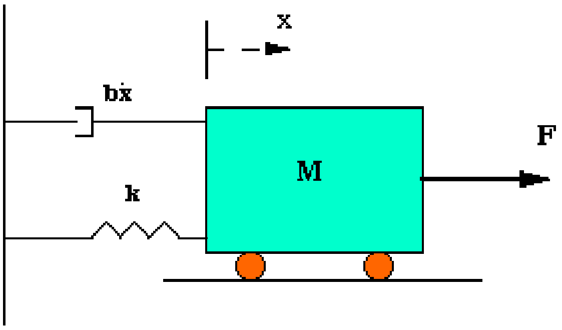
Cuando está diseñando un controlador PID para un sistema dado, siga los pasos de abajo para obtener una respuesta deseada.

1. Obtenga una respuesta a lazo abierto y determine qué hay que mejorar
2. Agregue un control proporcional para mejorar el tiempo de elevación
3. Agregue un control derivativo para mejorar el sobrepico
4. Add an control integral para eliminar el error de estado estacionario
5. Ajuste cada coeficiente Kp, Ki, y Kd hasta que obtenga la respuesta general deseada.

Finalmente, tenga en mente que no implementará los tres controladores (proporcional, derivativo, e integral) en un sistema, si no es necesario. Por ejemplo, si el controlador PI le proporciona una buena respuesta (como el ejemplo anterior), no necesitará implementar un controlador derivativo . Mantenga el controlador lo más simple que se pueda.

SISTEMA MECANICO

Suponga que tenemos un problema de masa simple, resorte y amortiguador.



La ecuación de modelo de este sistema es

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \quad (1)$$

Tomando transformada de Laplace de la ecuación del modelo (1)

$$Ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s)$$

La función de transferencia entre el desplazamiento X(s) y la entrada F(s) es entonces

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

Sea

- M = 1kg
- b = 10 N.s/m
- k = 20 N/m
- F(s) = 1

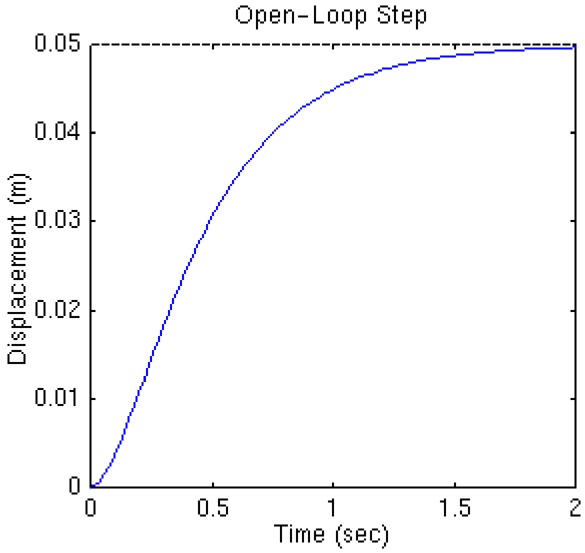
Introduzca estos valores en la función de transferencia anterior

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 10s + 20}$$

El objetivo de este problema es mostrarle cómo contribuyen Kp, Ki y Kd para obtener

- **Menor tiempo de subida**
- **Mínimo sobrepico**
- **Error de estado estacionario nulo**

RESPUESTA A LAZO ABIERTO AL ESCALÓN

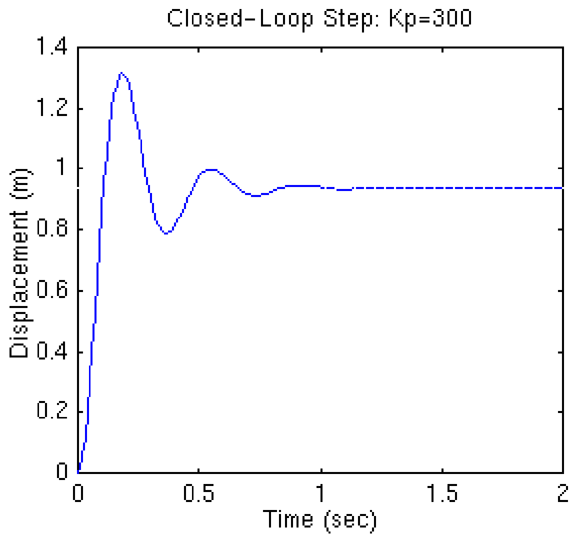


La ganancia de continua de la función de transferencia de la planta es 1/20, así que 0.05 es el valor final de la salida a una entrada escalón unitario. Esto se corresponde al error de estado estacionario de 0.95, bastante grande de hecho. Además, el tiempo de elevación es alrededor de un segundo, y el tiempo de establecimiento es alrededor de 1.5 segundos. Diseñemos un controlador que reducirá el tiempo de elevación y el tiempo de establecimiento, y eliminará el error de estado estacionario.

CONTROL PROPORCIONAL

De la tabla de arriba, vemos que el controlador proporcional (Kp) reduce el tiempo de trepada, incrementa el sobrepico, y reduce el error de estado estacionario. La función de transferencia a lazo cerrado del sistema de arriba con un controlador proporcional es:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_p}{s^2 + 10s + (20 + K_p)}$$

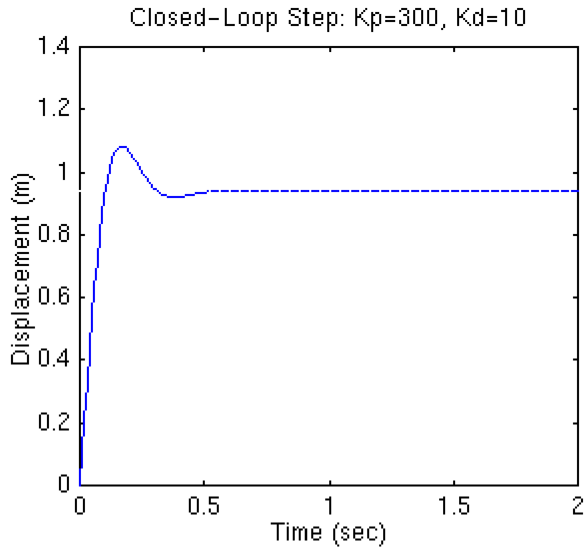


El gráfico de arriba muestra que el controlador proporcional con Kp=300, redujo tanto el tiempo de elevación cuanto el error de estado estacionario, incrementando el sobrepico, y bajando el tiempo de establecimiento en pequeña medida.

CONTROL PROPORCIONAL-DERIVATIVO

Ahora, echemos un vistazo a un Control PD. De la tabla de arriba, vemos que el controlador derivativo (Kd) reduce tanto el sobrepico cuanto el tiempo de establecimiento. La función de transferencia a lazo cerrado del sistema dado con un Controlador PD es:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_D s + K_P}{s^2 + (10 + K_D)s + (20 + K_P)}$$



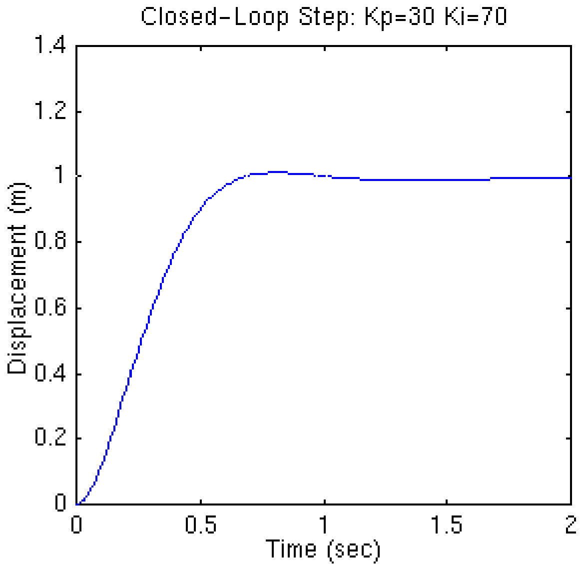
Esta figura muestra que el controlador derivativo redujo tanto el sobrepico cuanto el tiempo de establecimiento, y tuvo poco efecto en el tiempo de elevación y el error de estado estacionario.

CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL

Antes de avanzar a un control PID, echemos un vistazo al Control PI. De la tabla, vemos que un controlador integral (Ki) decrementa el tiempo de elevación, incrementa tanto el sobrepico cuanto el tiempo de establecimiento, y elimina el error de estado estacionario. Para el sistema dado, la función de transferencia a lazo cerrado con un Control PI es:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 10s^2 + (20 + K_P)s + K_I}$$

Reduzcamos Kp a 30, y hagamos Ki igual a 70.



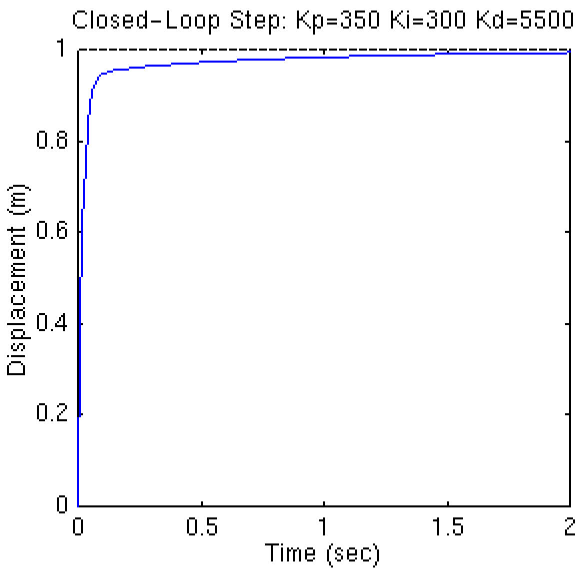
Hemos reducido la ganancia proporcional (Kp) porque el controlador integral también reduce el tiempo de elevación e incrementa el sobrepico así como lo hace el controlador proporcional (efecto doble). La respuesta anterior muestra que el controlador integral eliminó el error de estado estacionario.

CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO

Ahora, echemos un vistazo a a controlador PID . La función de transferencia a lazo cerrado del sistema dado con un controlador PID es:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s^3 + (10 + K_D)s^2 + (20 + K_p)s + K_I}$$

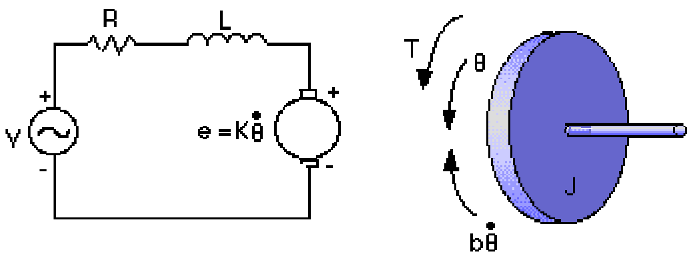
Luego de varias ejecuciones de prueba y error, las ganancias Kp=350, Ki=300, y Kd=50 proveerán la respuesta deseada.



Ahora, obtuvimos el sistema sin sobrepico, rápido tiempo de subida, y error de estado estacionario cero.

MOTOR DE CC

El motor de CC es un actuador común en control sistemas. Provee movimiento rotatorio directamente y, acoplado con ruedas dentadas o poleas y cables, puede proveer movimiento transicional. El circuito eléctrico de la armadura y el diagrama de cuerpo libre del rotor se muestran en la siguiente figura:



Para este ejemplo, asumimos los valores siguientes para los parámetros físicos. Estos valores se derivaron experimentalmente de un motor real del laboratorio de control:.

- **momento de inercia del rotor (J) = 0.01 kg.m^2/s^2**
- **coeficiente de amortiguamiento del sistema mecánico (b) = 0.1 Nms**
- **constante de fuerza electromotriz (K=Ke=Kt) = 0.01 Nm/Amp**
- **resistencia eléctrica (R) = 1 ohm**
- **inductancia eléctrica (L) = 0.5 H**
- **entrada (V): Fuente de Tensión**
- **salida (theta): posición del eje**
- **el rotor y eje se consideran rígidos**

El torque del motor, **T**, se relaciona con la corriente de armadura, **i**, por un factor constante **Kt**. La fuerza contraelectromotriz (emf), **e**, se relaciona con la velocidad de rotación mediante las siguientes ecuaciones

$$T = K_t i$$

$$e = K_e \dot{\theta}$$

En unidades del sistema internacional SI (las que usaremos), la **Kt** (constante de armadura) es igual a **Ke** (constante del motor).
De la figura de arriba podemos escribir las siguientes ecuaciones basadas en la ley de Newton combinado con la ley de Kirchhoff:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = Ki$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\dot{\theta}$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Usando Transformadas de Laplace, las ecuaciones del modelo de arriba pueden expresarse en términos de s.

$$s(Js + b)\Theta(s) = KI(s)$$
$$(Ls + R)I(s) = V - Ks\Theta(s)$$

Eliminando I(s) podemos obtener la siguiente función de transferencia a lazo abierto , donde la velocidad de rotación es la salida y el voltaje es la entrada.

$$\frac{\dot{\theta}}{V} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2}$$

REALIZAR EL MISMO ANÁLISIS QUE EL HECHO CON EL SISTEMA MECANICO

BIBLIOGRAFÍA

- TUTORIALES DE CONTROL CON MATLAB – UNIVERSIDAD DE MICHIGAN
- www.engin.umich.edu/

.