Aplicaciones de la derivada a la geometría

Hallar el área del triángulo que forma la recta $y = \frac{9}{2}x + 8$ *con las rectas tangente y normal a la curva* $f(x) = -2x^2 + 6$ *en* $(1;4)$.

Para poder calcular el área del triángulo se requiere, en primer lugar, determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal debido a que dos de sus lados están contenidos en las mencionadas rectas.

¿Qué se quiere decir cuando se habla de que una recta es tangente a una curva en un punto? Para un círculo, se puede caracterizar la recta tangente en un punto P como la recta perpendicular a la recta radial que pasa por P (Figura 1.1). Sin embargo, para una curva arbitraria el problema es más difícil. Así, ¿cómo definir la recta tangente que se muestra en la Figura 1.2?

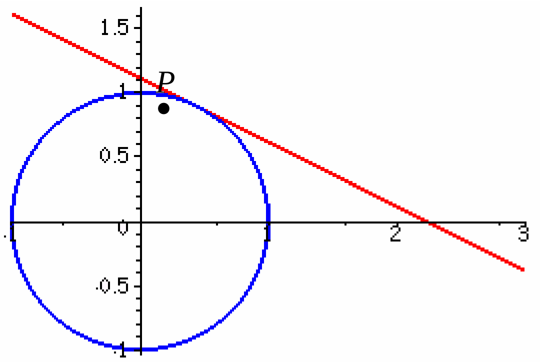


Figura 1.1

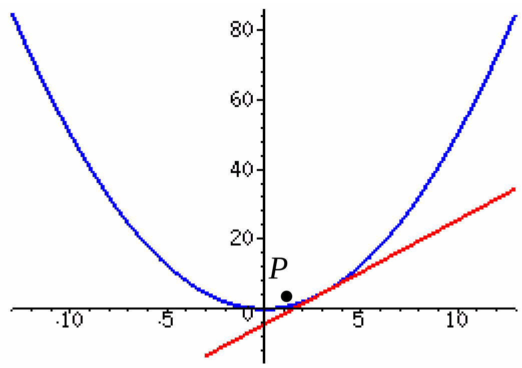


Figura 1.2

Esencialmente, el problema de hallar la recta tangente en un punto P se reduce al de hallar su pendiente. Y ésta puede aproximarse mediante rectas que pasen por P y por otro punto Q de la curva (Figura 1.3), a las que se les llamará ***rectas secantes***.

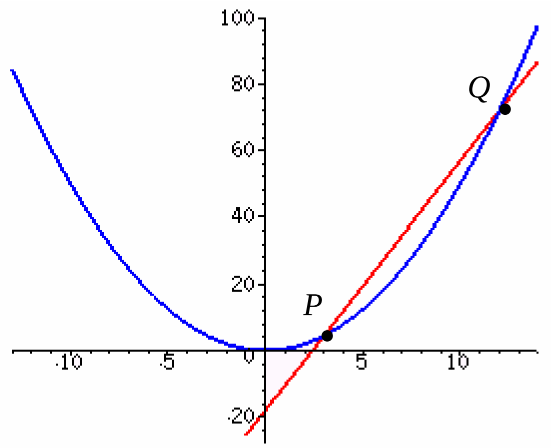
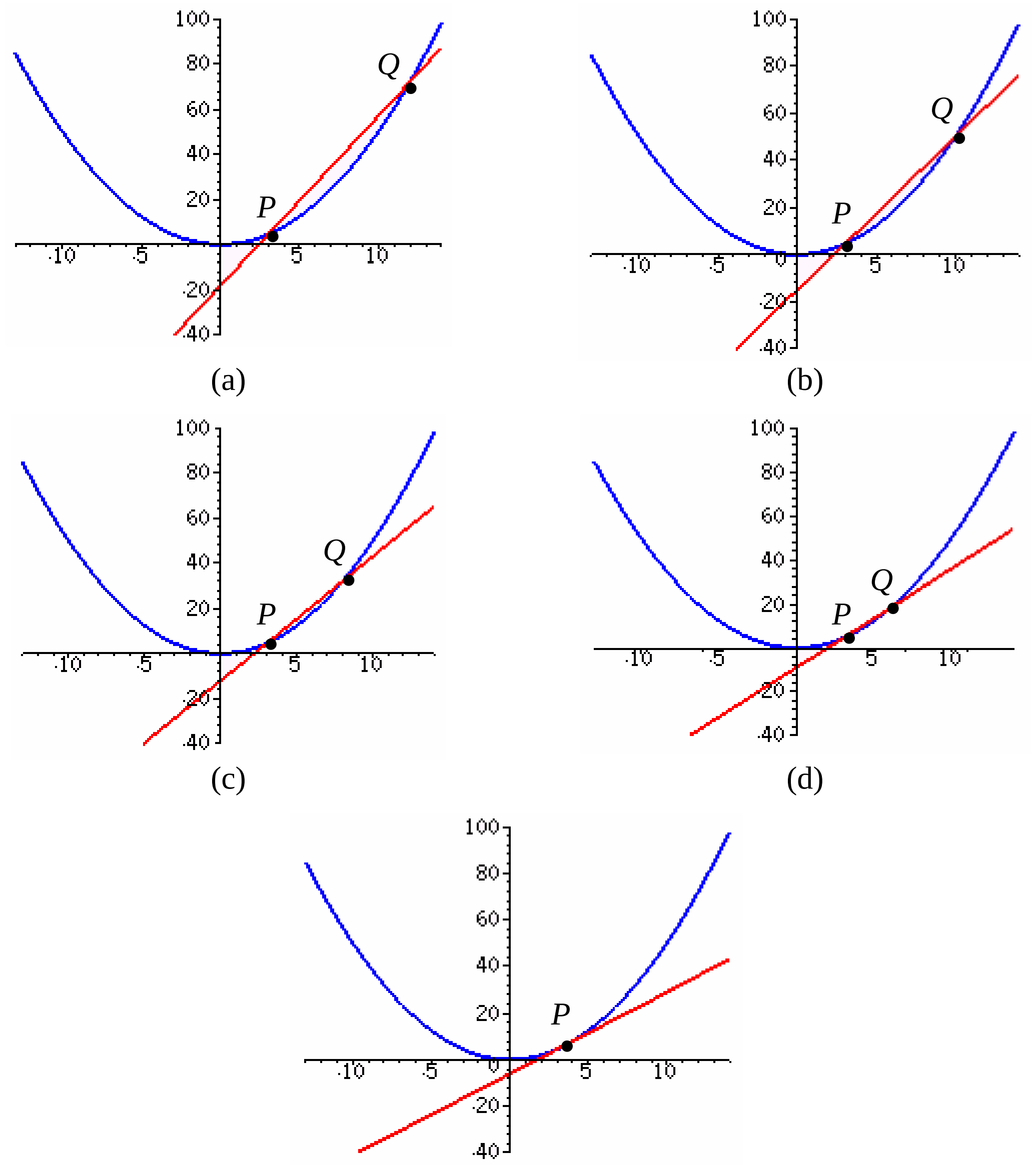


Figura 1.3

Se puede observar que a medida que Q se acerca a P (Figura 1.4), las rectas secantes van tendiendo a la posición de la recta tangente en P, es decir, sus pendientes tienden a la pendiente de la recta tangente en P.

De esta manera, se puede definir a la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto P como ***la posición límite de sus rectas secantes en los puntos P, Q, cuando Q se acerca a P por la izquierda así como por la derecha***. Evidentemente, esta posición límite de las rectas secantes puede no existir. Esto ocurre, por ejemplo, cuando la posición límite de las rectas secantes cuando Q se acerca a P por la izquierda no coincide con la posición límite cuando Q se acerca a P por derecha.



(a) (b) (c) (d) (e)

Figura 1.4

Para precisar el concepto desarrollado con anterioridad, se considerará una función $f(x)$ definida en $]a;b[$, un punto $P(x_0; f(x_0))$ y otro punto $Q(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$ de la gráfica de dicha función, donde Δx es un número real no nulo. La pendiente de la recta secante que pasa por los P y Q está dada por:

$$m_s = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Luego, haciendo tender Δx a 0, se obtendrá que *Q* se acerque a *P* y de esta manera, la recta secante tenderá a la recta tangente. Así, la pendiente de la recta tangente en el punto *P* será:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

siempre que este límite exista y sea finito.

Recordando que la derivada de una función en un punto x_0 es:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3)$$

surge de inmediato la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto, puesto que coincide con la pendiente de la recta tangente a ese punto. Entonces, se puede decir que:

> *La derivada de una función $f(x)$ en $x = x_0$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0; f(x_0))$*

Para poder determinar la ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0; f(x_0))$ se procede de la siguiente manera. Se sabe que la ecuación de una recta es de la forma:

$$y = mx + h \qquad (4)$$

donde *m* es la pendiente y *h* la ordenada al origen.

Según lo visto anteriormente, la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0; f(x_0))$ está dada por:

$$m_t = f'(x_0) \qquad (5)$$

Para calcular la ordenada al origen, se tendrá en cuenta además que $(x_0; f(x_0))$ es un punto que pertenece a la recta y por ende verifica su ecuación:

$$f(x_0) = f'(x_0)\, x_0 + h$$

donde

$$h = f(x_0) - f'(x_0)\, x_0 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4) se obtiene la ecuación de la ***recta tangente*** en el punto $(x_0; f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (7)$$

Ahora, si se toma la recta que pasa por el punto de tangencia y que es perpendicular a la recta tangente se obtiene la ***recta normal*** (Figura 1.5). Para determinar la ecuación de la recta normal se deberá recordar que dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es –1. En este caso particular:

$$m_t \cdot m_n = -1 \qquad (8)$$

Sustituyendo (5) en (8) y despejando m_n se obtiene:

$$m_n = -\frac{1}{f'(x_0)} \qquad (9)$$

Para calcular la ordenada al origen , se tendrá en cuenta que $(x_0; f(x_0))$ también es un punto que pertenece a la recta y por ende verifica su ecuación. Por lo tanto:

$$h = f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} x_0 \qquad (10)$$

Reemplazando (9) y (10) en (4) se obtiene la ecuación de la recta normal en el punto $(x_0; f(x_0))$:

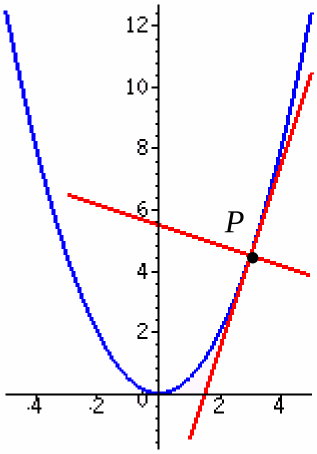


Figura 1.5

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ si } f'(x_0) \neq 0 \qquad (11)$$

En el caso que $f'(x_0) = 0$, la recta tangente será horizontal y la recta normal vertical.

Volviendo al problema planteado al inicio, para calcular el área del triángulo se deberá determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal. Para ello, se deberá calcular la derivada de la función $f(x) = -2x^2 + 6$:

-- (12)

Evaluando (12) en la abscisa del punto $(1;4)$ se obtiene la pendiente de la recta tangente:

Teniendo en cuenta que $(1;4)$ es un punto que pertenece a la recta tangente se puede determinar el valor de la ordenada al origen:

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $(1;4)$ es:

-- (13)

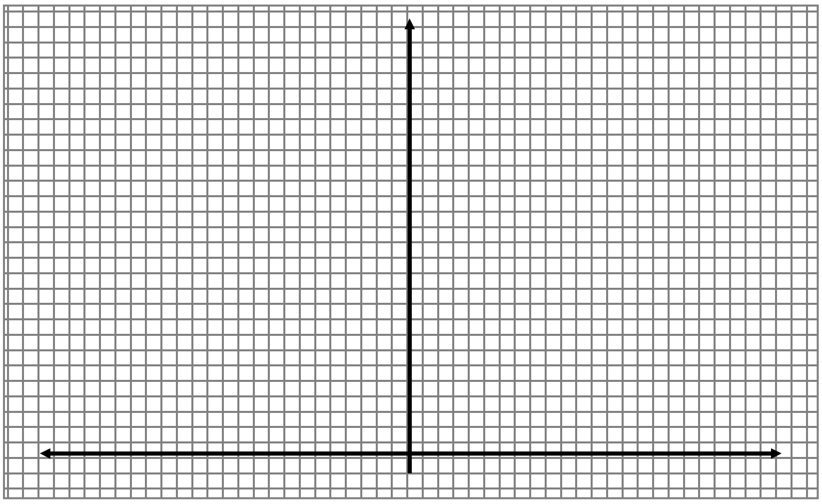
Recordando que $m_t \cdot m_n = -1$, la pendiente de la recta normal es:

Sabiendo que $(1;4)$ es un punto que pertenece a la recta normal, el valor de la ordenada está dado por:

Así, la ecuación de la recta normal es:

--- (14)

Para calcular el área del triángulo que la recta $y = \frac{9}{2}x + 8$ forma con las rectas (13) y (14), se graficarán las mismas en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.



Se puede observar que el triángulo cuyos lados están contenidos en las rectas graficadas en el sistema de coordenadas es rectángulo. Para determinar su área basta con calcular la integral:

Así, el área del triángulo está dada por:

Actividades

1) Dadas las leyes de funciones, hallar en los puntos de abscisas que se indican las ecuaciones de las rectas tangente y normal.

a) $f(x) = 2 \cdot x^3 - x^2 + 6 \cdot x - 3$ en $x_0 = 1$

b) $f(x) = 3 \cdot x^2 + x^{-1}$ en $x_0 = -1$

2) ¿En qué puntos de la curva $y = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + x - 2$ la recta tangente , es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

3) Indicar si hay algún punto en el gráfico de $f(x) = -5x^3 - \frac{2}{x}$ en el cual la recta tangente forme un ángulo de 45º con el eje *x*.

4) La tangente a la gráfica $f(x) = x^3 + 4$ en el punto $(1;5)$ corta a la misma en otro punto. Hallarlo.

5) Sea $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 17$. ¿En qué puntos la recta tangente tiene pendiente 2?

6) Encontrar los valores de *a* y *b* si la tangente a $y = a \cdot x^2 + b \cdot x$ en $(1;5)$ tiene pendiente 8.

7) Hallar el área del triángulo que forma la recta $y = x$ con las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$ en $(1;-2)$.

Aplicaciones de la derivada a la Física

Movimiento rectilíneo

Una aplicación común de las razones de cambio ocurre en la descripción del movimiento de un objeto que se mueve sobre una recta, lo que se conoce como ***movimiento rectilíneo***. Por ejemplo, el objeto podría estar representado por una roca que se deja caer hacia el suelo desde una cierta altura, una bola de billar que se mueve sobre una mesa, o un automóvil que viaja por una pista recta.

Por conveniencia, se introduce una recta coordenada a lo largo de la trayectoria del objeto. Sea la dirección positiva la dirección del movimiento e imaginémonos que un reloj mide el tiempo transcurrido, ***t***, empezando con ***t = 0***. Después de ***t*** unidades de tiempo, el objeto estará a una cierta distancia ***s*** del origen; por lo tanto ***s*** es una función de ***t***:

$$s = f(t) \qquad (15)$$

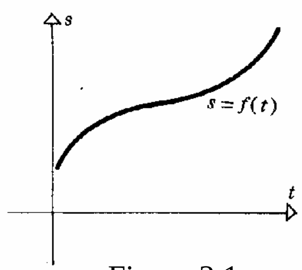


Figura 2.1

Si se grafica (15) con el eje ***t*** horizontal y el eje ***s*** vertical, se obtiene la ***curva de posición*** (Figura 2.1). Usando esta curva es posible interpretar geométricamente la ***velocidad media*** y la ***velocidad instantánea***. Por ejemplo, supongamos que interesa conocer la velocidad media del objeto en el intervalo de tiempo t_0 a t_1. En el tiempo t_0 el objeto está a cierta distancia s_0 del origen y en el tiempo t_1 está a cierta distancia s_1. En el intervalo de tiempo de t_0

a t_1, la distancia recorrida es:

$$s_1 - s_0$$

y el tiempo transcurrido es:

$$t_1 - t_0$$

de modo que la ***velocidad media*** durante el intervalo está dada por:

$$\textbf{\textit{Velocidad media}} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \qquad (\ 16\ )$$

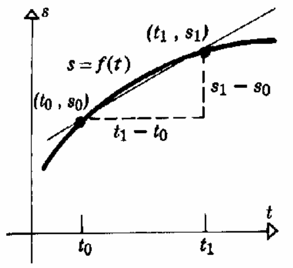


Figura 2.2

Sin embargo, los puntos (t_0, s_0) y (t_1, s_1) se localizan sobre la curva de la posición, de modo que la expresión (16) es también la pendiente de la recta secante que une estos puntos (Figura 2.2). En otras palabras:

Para un objeto que se mueve sobre una recta, la velocidad media entre el tiempo t_0 y el t_1 está representada geométricamente por la pendiente de la recta secante que une (t_0, s_0) y (t_1, s_1) sobre la curva de la posición.

Si se elige t_1 próximo a t_0, entonces la velocidad media entre los tiempo t_1 y t_0 se aproxima mucho a la velocidad instantánea en el tiempo t_0; por otra parte, si t_1 se aproxima cada vez más a t_0, todo indica que estas aproximaciones se acercarán al valor exacto de la velocidad instantánea en t_0.

Por lo tanto, si t_1 se mueve hacia t_0, el punto (t_1, s_1) se mueve hacia (t_0, s_0) sobre al curva de la posición (Figura 2.3), de modo que la pendiente de la recta secante entre (t_0, s_0) y (t_1, s_1) se aproxima a la pendiente de la recta tangente en (t_0, s_0). Es decir:

Para un objeto que se mueve sobre una recta, la velocidad instantánea en el tiempo t_0 está representada geométricamente por la pendiente de la recta tangente en (t_0, s_0) sobre la curva de la posición.

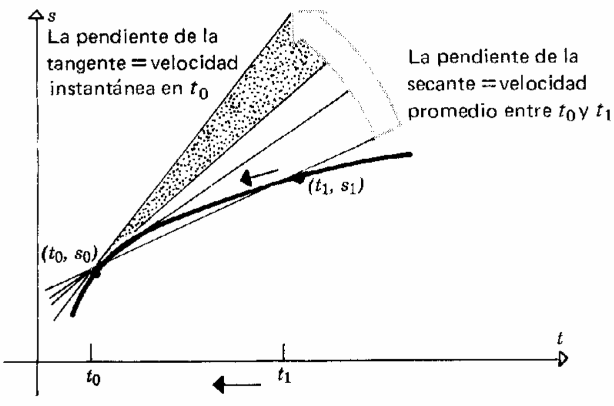


Figura 2.3

Velocidad instantánea

Si $s(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve sobre una recta coordenada, entonces la ***velocidad instantánea*** en el instante ***t*** está definida por:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} \tag{17}$$

y la ***rapidez instantánea*** en el instante ***t*** está definida por:

$$\textbf{\textit{Rapidez en el instante t}} = |v(t)| = |s'(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \tag{18}$$

Si $v(t) > 0$ en un instante dado ***t***, entonces la coordenada ***s*** del objeto se está incrementando en ese instante, lo que significa que el objeto está moviéndose en la dirección positiva de la recta; de manera similar, si $v(t) < 0$, entonces ***s*** está disminuyendo en el instante ***t*** y el objeto está moviéndose en la dirección negativa. La rapidez de un objeto es siempre no negativa, indica qué tan rápido se está moviendo el objeto, pero no proporciona información alguna sobre la dirección del movimiento.

Aceleración instantánea

Si $v(t)$ es la velocidad en el instante ***t*** de una partícula que se mueve sobre una recta coordenada, entonces su ***aceleración instantánea*** en el instante ***t*** está definida por:

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} \tag{19}$$

Puesto que $v(t) = s'(t) = \dfrac{ds}{dt}$, la fórmula de esta definición también puede escribirse:

$$a(t) = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} \tag{20}$$

Las fórmulas:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \tag{21}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \tag{22}$$

pueden escribirse en las formas alternativas:

$$s(t) = \int v(t) \cdot dt \tag{23}$$

$$v(t) = \int a(t) \cdot dt \tag{24}$$

De este modo, si se cuenta con información suficiente para determinar las constantes de integración, es posible determinar la velocidad a partir de la aceleración, y la posición a partir de la velocidad.

Nota: La rapidez de un objeto se incrementa cuando su velocidad y su aceleración tienen el mismo signo y que la rapidez disminuye cuando tienen signos opuestos. De este modo, un objeto que se mueve en la dirección positiva ($v(t) > 0$) "se acelera" cuando su aceleración es positiva y "se frena" cuando su aceleración es negativa, mientras que un objeto que se mueve en la dirección negativa ($v(t) < 0$) "se acelera" cuando su aceleración es negativa y "se frena" cuando su aceleración es positiva.

<u>Actividades</u>

1) Si en la luna se dispara una flecha hacia arriba con una velocidad de 58 m / s , su altura (en metros) después de ***t*** segundos está dada por: $H(t) = 58 \cdot t - 0.83 \cdot t^2$.

a) Encontrar la velocidad de la flecha después de 1 s.

b) Determinar la velocidad media de la flecha en el intervalo [2 ; 5].

c) ¿Cuándo chocará la flecha contra la Luna?

d) ¿Con qué velocidad chocará contra la Luna?

2) Una partícula se mueve según una ley del movimiento $f(t) = t^3 - 12 \cdot t^2 + 36 \cdot t$, $t \geq 0$, donde ***t*** se mide en segundos y ***s*** en metros.

a) Encontrar la velocidad en el instante *t*.

b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 *s*?

c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?

d) ¿Cuándo se mueve hacia adelante?

e) Encontrar la distancia recorrida durante los primeros 8 *s*.

f) Encontrar la aceleración en el instante *t* y después de 3 *s*.

g) Trazar las gráficas de las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 8$

h) ¿Cuándo se acelera y desacelera la partícula?

3) En un planeta lejano se lanza hacia arriba una piedra desde una altura de 27 metros con una velocidad inicial de 18 m/s. La altura en metros a la que se encuentra la piedra desde el suelo después de ***t*** segundos de haber sido lanzada, está dada por:

$$h(t) = -9 \cdot t^2 + 18 \cdot t + 27$$

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

b) ¿Para qué valores de *t* la piedra asciende y para cuáles desciende?

c) ¿Cuánto tiempo demora la piedra en llegar al suelo?

d) ¿Cuál es la velocidad de la piedra cuando está 33,75 m arriba del piso en su camino hacia abajo?

e) ¿Cuál es la aceleración de la piedra?

4) Se arroja una piedra desde la terraza de un edificio. Su altura en metros sobre el suelo, t segundos después de haber sido lanzada, está dada por la función:

$$H(t) = 40{,}5 - 4{,}5t - 3t^2$$

a) Calcular la velocidad media entre el primer y tercer segundo.

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

c) ¿Cuál es la velocidad de la piedra cuando está 17.82 m arriba del suelo?

d) ¿Cuál es la aceleración de la piedra?

e) ¿Cuándo se acelera y desacelera la piedra?