

Inecuaciones con valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real a se denota por $|a|$ y está definido por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades

Si a y b son números reales y n es un número entero, entonces:

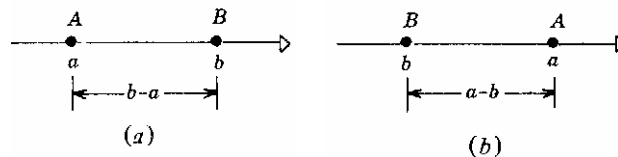
$$1) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$3) |a^n| = |a|^n$$

$$2) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$4) |a + b| \leq |a| + |b|$$

La noción de **valor absoluto** surge de una manera natural en problemas de distancia. En una recta coordenada, sean A y B puntos con coordenadas a y b . Debido a que la distancia es siempre no negativa, la distancia d entre A y B es $d = b - a$ cuando B está a la derecha de A (figura a), y $d = a - b$ cuando B está a la izquierda de A (figura b).



En el primer caso, $b - a$ es positiva, de modo que puede escribirse:

$$d = b - a = |b - a|$$

y en el segundo caso, $b - a$ es negativa, de modo que puede escribirse:

$$d = a - b = -(b - a) = |b - a|$$

Por lo tanto, independientemente de si B está a la derecha o a la izquierda de A, la distancia d entre A y B es:

$$d = |b - a|$$

Para cualquier número real b puede escribirse:

$$|b| = |b - 0|$$

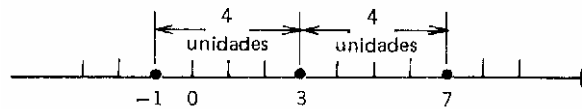
Por lo tanto, el **valor absoluto** de un número b puede interpretarse geoméricamente como su distancia desde el origen sobre una recta coordenada.

Por ejemplo, si $|b| = 9$, entonces b está a 9 unidades del origen, es decir $b = 9$ ó $b = -9$.



Ejemplo 1: Resolver $|x - 3| = 4$

La solución desde el punto de vista geométrico consta de todas las x que están a 4 unidades del punto 3. Hay dos de estos valores de x , $x = 7$ y $x = -1$.



Desde el punto de vista algebraico, dependiendo de si $x - 3$ es positiva o negativa, la ecuación puede escribirse:

$$x - 3 = 4 \quad \text{ó} \quad x - 3 = -4$$

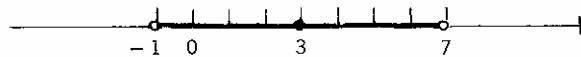
Resolviendo estas dos ecuaciones se obtiene, $x = 7$ y $x = -1$ que concuerda con la solución obtenida geoméricamente.

Ejemplo 2: Resolver $|x - 3| < 4$

La solución consta de todas las x cuyas distancias al punto 3 sean menores que 4 unidades, es decir, de todas las x que satisfacen:

$$-1 < x < 7$$

Este es el intervalo $] -1, 7[$ que se muestra en la siguiente figura:

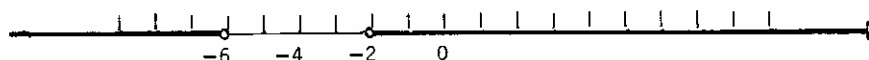


Ejemplo 3: Resolver $|x + 4| > 2$

La desigualdad dada puede escribirse:

$$|x - (-4)| > 2$$

Por lo tanto, la solución consta de todas las x cuyas distancias de -4 sean mayores que 2 unidades. Este es el conjunto: $] -\infty, -6[\cup] -2, +\infty[$, el cual se muestra en la figura.





Propiedades

Para cualquier número real x y cualquier número positivo k :

$$1) |x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$$

$$2) |x| > k \Leftrightarrow x < -k \vee x > k$$

Actividades

1) Hallar en \mathfrak{R} , el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones. Representar gráficamente el conjunto solución

$$a) \left| -\frac{1}{4}x + 3 \right| \geq 1$$

$$f) |x| < x + 1$$

$$b) \left| 7x - \frac{3}{5} \right| < 1$$

$$g) \left| \frac{2x + 3}{-5} \right| \leq \left(-\frac{1}{2} \right)^{-1}$$

$$c) \left| \frac{-3x + 1}{2} \right| > 1$$

$$h) \left| \frac{x^2 - 1}{2} \right| \geq 1$$

$$d) \left| -\frac{6}{5}x - 1 \right| \leq -2$$

$$i) \left| \frac{3x + 7}{4} \right| > \sqrt[3]{-27}$$

$$e) |x - 4| > x - 2$$

$$j) |x^2 - 3| \leq 2$$

Inecuaciones polinómicas de orden superior

Las inecuaciones polinómicas de segundo grado con una incógnita son desigualdades de la forma:

$$P(x) > 0 \quad \text{ó} \quad P(x) \geq 0$$

$$P(x) < 0 \quad \text{ó} \quad P(x) \leq 0$$

siendo $P(x)$ un polinomio de segundo grado.

Veremos cómo se puede encontrar el conjunto solución de esta clase de inecuaciones.

Ejemplo 1:

$$x^2 - x - 6 > 0$$

Encontramos las raíces del polinomio:

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x = 3 \quad x = -2$$

Factorizamos el trinomio:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2)$$

La inecuación puede expresarse:

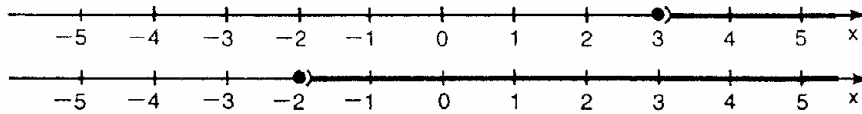
$$(x - 3) \cdot (x + 2) > 0$$

Para que este producto sea mayor que cero (positivo) ambos factores deben tener el mismo signo.

$$I. \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad II. \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$$

Consideremos el primer caso:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -2 \end{cases}$$



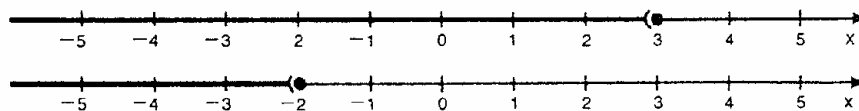
La solución de este sistema es el conjunto de valores que cumplen las dos condiciones, es decir el conjunto intersección.

$$S_I =]3, +\infty[$$



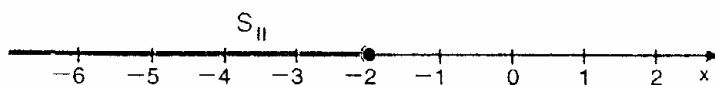
Consideramos el segundo caso:

$$\begin{cases} x - 3 < 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < -2 \end{cases}$$



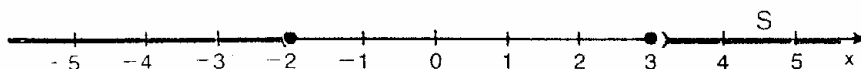
La solución de este sistema es el conjunto de valores que cumplen las dos condiciones, es decir el conjunto intersección.

$$S_{II} =]-\infty, -2[$$



La solución del sistema es: $S = S_I \cup S_{II}$

$$S =]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[$$



Ejemplo 2:

$$x^2 - x - 6 < 0$$

Encontramos las raíces del polinomio y lo factorizamos:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2)$$

La inecuación puede expresarse:

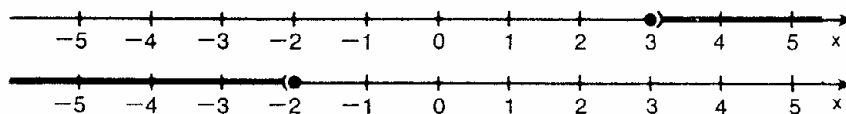
$$(x - 3) \cdot (x + 2) < 0$$

Para que este producto sea menor que cero (negativo) uno de los factores es positivo y el otro negativo.

$$I. \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad II. \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

Consideremos el primer caso:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -2 \end{cases}$$



No hay valores de x que satisfagan simultáneamente las dos condiciones.

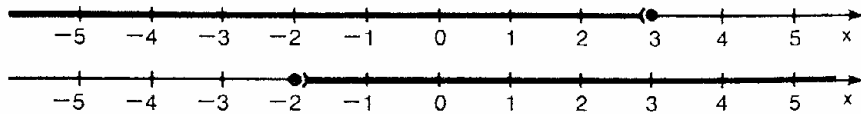
$$S_I = \emptyset$$

Consideramos el segundo caso:

$$\begin{cases} x - 3 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -2 \end{cases}$$

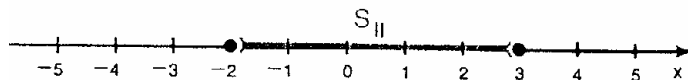
La solución de este sistema es el conjunto de valores que cumplen las dos condiciones, es decir el conjunto intersección.

$$S_{II} =]-2,3[$$



La solución del sistema es: $S = S_I \cup S_{II}$

$$S =]-2,3[$$



Actividades

1) Hallar en \mathfrak{R} , el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones. Expresar el resultado en forma de intervalo. Representar gráficamente el conjunto solución.

a) $x^2 + 3x - 10 \leq 0$

f) $x^3 - x^2 \leq 0$

b) $2x^2 - 4x - 30 > 0$

g) $x^3 - 4x^2 + 9x - 36 > 0$

c) $-x^2 + 4x - 5 > 0$

h) $2x^3 - 10x^2 + 6x + 18 < 0$

d) $-3x^2 + 15x + 18 < 0$

i) $-3x^3 - 12x^2 - 3x + 18 \geq 0$

e) $2 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 50 \leq 0$

j) $-4x^3 - 20x^2 - 32x - 16 \leq 0$

Inecuaciones racionales

Las inecuaciones racionales son desigualdades de la forma:

$$P(x) > 0 \quad \text{ó} \quad P(x) \geq 0$$

$$P(x) < 0 \quad \text{ó} \quad P(x) \leq 0$$

siendo $P(x)$ una función racional.

Veremos cómo se puede encontrar el conjunto solución de esta clase de inecuaciones.

Ejemplo:

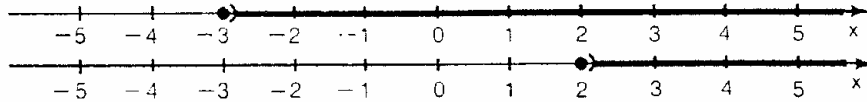
$$\frac{x+3}{x-2} > 0$$

Para que este cociente sea mayor que cero (positivo) el numerador y el denominador deben tener el mismo signo.

$$I. \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad II. \begin{cases} x+3 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$$

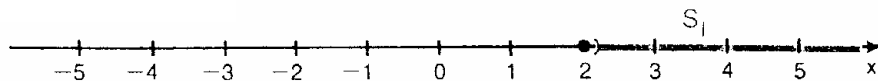
Consideremos el primer caso:

$$\begin{cases} x+3 > 0 & \Rightarrow & \begin{cases} x > -3 \end{cases} \\ x-2 > 0 & \Rightarrow & \begin{cases} x > 2 \end{cases} \end{cases}$$



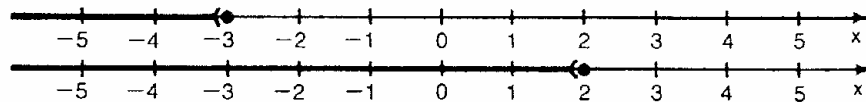
La solución de este sistema es el conjunto de valores que cumplen las dos condiciones, es decir el conjunto intersección.

$$S_I =]2, +\infty[$$



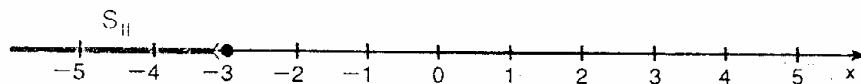
Consideramos el segundo caso:

$$\begin{cases} x+3 < 0 & \Rightarrow & \begin{cases} x < -3 \end{cases} \\ x-2 < 0 & \Rightarrow & \begin{cases} x < 2 \end{cases} \end{cases}$$



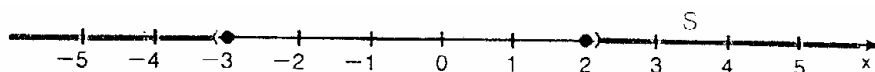
La solución de este sistema es el conjunto de valores que cumplen las dos condiciones, es decir el conjunto intersección.

$$S_{II} =]-\infty, -3[$$



La solución del sistema es: $S = S_I \cup S_{II}$

$$S =]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$$





Actividades

1) Hallar en \mathfrak{R} , el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones. Expresar el resultado en forma de intervalo. Representar gráficamente el conjunto solución.

a) $\frac{-2x+3}{x-1} \leq 0$

f) $\frac{x+1}{x^2+x-2} > 0$

b) $3 - \frac{1}{x} \geq -2$

g) $\frac{x^2+4x+4}{x-3} < 0$

c) $\frac{x-2}{x+3} < 1$

h) $\frac{4}{x} - x \leq 0$

d) $\frac{5x}{-2x+4} \geq \frac{1+x}{x-2}$

i) $\left| 2 + \frac{5}{x} \right| > 1$

e) $\frac{-x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} \geq 2$

j) $\frac{-x^2+x+6}{x^2+1} \leq 0$