Integral definida

¿Cómo encontramos el área de la región limitada por los ejes coordenados positivos si conocemos la ley de la función que la limita?

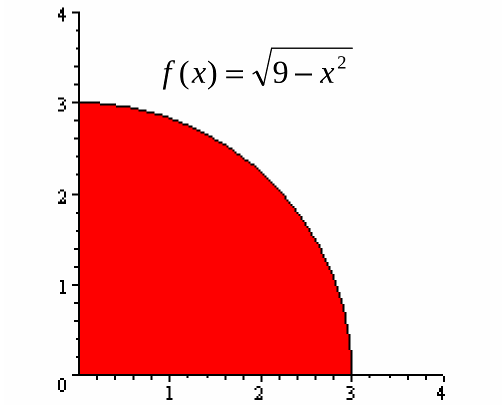


Figura 1

Una posible forma para determinar el área pedida es:

---

(1)

El desafío es encontrar el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ en el intervalo $[0;3]$.

Si bien en la actualidad resulta muy simple resolver este tipo de problema por medio del cálculo, una larga lista de personas tuvieron que trabajar, e incluso esperar veinte siglos, para tener la madurez social, científica y matemática que permitiría dar respuesta a estos problemas.

Detrás de cualquier descubrimiento o nueva teoría, existe, indudablemente, la evolución de ideas que hacen posible su nacimiento. Es muy interesante prestar atención en el bagaje de conocimientos que se acumula, desarrolla y evoluciona a través de los años para dar lugar, en algún momento en particular y a través de alguna persona en especial, al nacimiento de una nueva idea, de una nueva teoría, que seguramente se va a convertir en un descubrimiento importante para el estado actual de la ciencia y, por lo tanto merece el reconocimiento.

El problema del cálculo de áreas planas se remonta a los tiempos de los griegos. Así, por ejemplo, Arquímedes consideraba que el área de una región del plano podía calcularse por medio de regiones poligonales inscritas o circunscritas a la misma, tales que al aumentar el número de lados, el área de estos polígonos tiende a aproximarse al área pedida. Es importante resaltar que éste método, denominado método exhaustivo, exige el conocimiento previo del resultado, y que por lo tanto sólo sirve como método de demostración.

En el siglo XVII, los matemáticos perdieron el miedo al infinito que los griegos habían tenido. Así, Cavalieri fue uno de los primeros en usarlo. Éste consideraba un área como constituida por un número indefinido de segmentos paralelos y equidistantes. Al sumar los segmentos y multiplicar por su grosor se obtendría una aproximación del área que se deseaba calcular.

Las desventajas de este método de indivisibles, como la poca generalidad, debilidad lógica, excesivos razonamientos y procedimientos geométricos, fueron rápidamente superados por otros matemáticos de la época, entre ellos, Pascal.

A Pascal se le debe un reforzamiento del método de los indivisibles de Cavalieri. En efecto, Pascal sustituyó los indivisibles por rectángulos cuyas bases eran cada vez más pequeñas a medida que aumentaba la cantidad de los mismos.

Si tenemos en cuenta la forma de trabajo usada por Pascal, una aproximación del área bajo la gráfica de $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ en el intervalo $[0;3]$, se puede encontrar usando dos rectángulos como se muestra en la Figura 2. La altura del primer rectángulo es ______ y la altura del segundo rectángulo es______ . El ancho de cada rectángulo es______.

Por lo tanto, el área total está dada por:

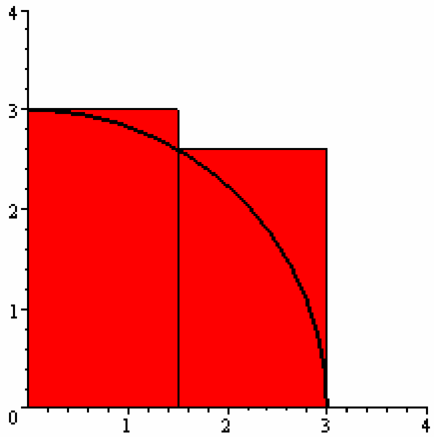


Figura 2

Como observamos en la gráfica, esta aproximación es mayor que el área real. Para lograr una mejor aproximación podemos dividir el intervalo $[0;3]$ en tres partes iguales, cada uno de una unidad de ancho.

De esta manera, el área total de los rectángulos es:

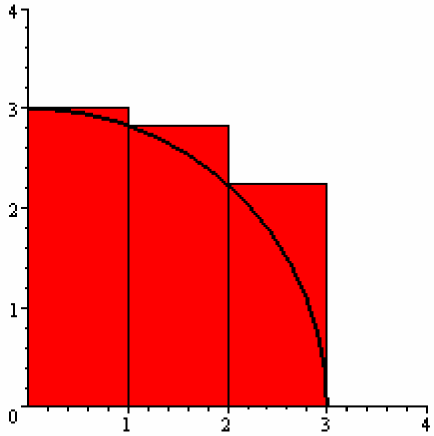


Figura 3

Podemos observar que esta aproximación es mucho más precisa que la anterior pero aún es mayor que el área real buscada. Para mejorar la aproximación podemos dividir el intervalo en seis partes con anchos iguales, es decir considerar como medida de la base de cada rectángulo 0,5 unidades. Así, se obtiene:

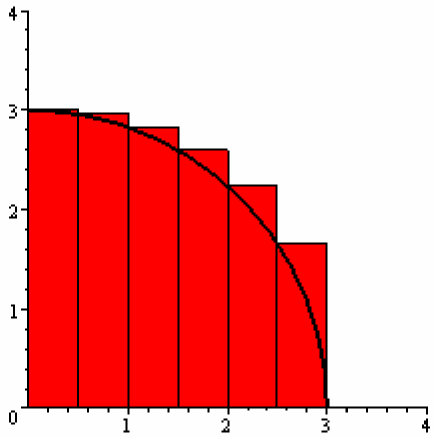


Figura 4

¿Cómo podemos buscar otra forma más sencilla para resolver este problema sin necesidad de efectuar tantos cálculos?

Para ello, analizaremos por medio de una animación qué es lo que sucede a medida que el número *n* de rectángulos es cada vez más grande.

¿Qué conclusión puedes extraer? Comparar el valor obtenido con el calculado en (1).

¿Qué sucede si en lugar de elegir como altura la imagen del extremo inferior de cada uno de los subintervalos se utiliza la del extremo superior?

El área A de una región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x \right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x \qquad (2)$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x \right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x \qquad (3)$$

donde Δx denota la medida de la base de cada uno de los rectángulos.

Teniendo en cuenta lo expresado, surge la necesidad de dar un nombre y una notación a este tipo de límites.

Si f es una función continua sobre el intervalo $[a;b]$, entonces la ***integral definida*** de f de a a b, que se indica $\int_a^b f(x)\cdot dx$, es el número:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x \text{ con } \Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad (4)$$

si se toma como altura de los rectángulos la imagen del extremo inferior de cada uno de los subintervalos. En cambio, si se toma como altura de los rectángulos la imagen del extremo superior de cada uno de los subintervalos, la ***integral definida*** es:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x \text{ con } \Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad (5)$$

El matemático Leibniz fue el que creó el símbolo $\int f(x)\cdot dx$. La $\int$ es una *S* alargada de summa (palabra latina para suma). La notación de la integral definida ayuda a tener en cuenta el significado de la misma. El símbolo $\int_a^b f(x)\cdot dx$ hace referencia al hecho de que una integral es un límite de una suma de términos de la forma "$f(x)$ por una porción infinitesimalmente pequeña de *x*".

Hasta ahora hemos dividido el intervalo $[a;b]$ en subintervalos de la misma longitud, pero en realidad ésto no es necesario. Riemann generalizó todo el estudio que hemos hecho hasta ahora para subintervalos de distinto tamaño. Además, nos hemos referido hasta ahora a funciones continuas y no negativas (puesto que estábamos hablando de área bajo una curva) En este aspecto también Riemann generalizó sus conclusiones y la única condición que puso es que la función $f(x)$ estuviese definida en $[a;b]$. Es decir, la definición de la integral definida es válida aún cuando $f(x)$ tome valores negativos (es decir cuando la gráfica se encuentre debajo del eje de abscisas). Sin embargo, en este caso, el número resultante no representará el área entre la gráfica y el eje *x*.

Por sus importantes aportes, la sumatoria que aparece en la definición de integral definida recibe el nombre de suma de Riemann en honor al matemático alemán Bernahrd Riemann.

Actividades

1) Resolver las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^2 \frac{x^6+3x^4-3}{x^3}\cdot dx$

b) $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}\cdot dx =$

c) $\int_2^4 x\cdot \ln(x)\cdot dx =$

d) $\int_{-1}^0 (3x+1)\cdot e^{3x+1}\cdot dx =$

e) $\int_6^{13} \frac{x+3}{3\cdot\sqrt{x+3}}\cdot dx =$

f) $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{3\cdot\sqrt{x}}\cdot dx =$

g) $\int_3^6 \frac{x+2}{(x^2+4x)^{\frac{1}{2}}}dx =$

2) Graficar y calcular el área determinada por los valores de *x* dados y el eje de las abscisas.

a) $f(x)=\ln(2x)$ si $1\le x\le 4$

b) $f(x)=(x+1)^3$ si $-4\le x\le 2$

c) $f(x)=\cos(x)$ si $\pi\le x\le 2\pi$

d) $f(x)=-2\cdot e^{2x}$ si $1\le x\le 3$

e) $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ si $-4\le x\le 2$

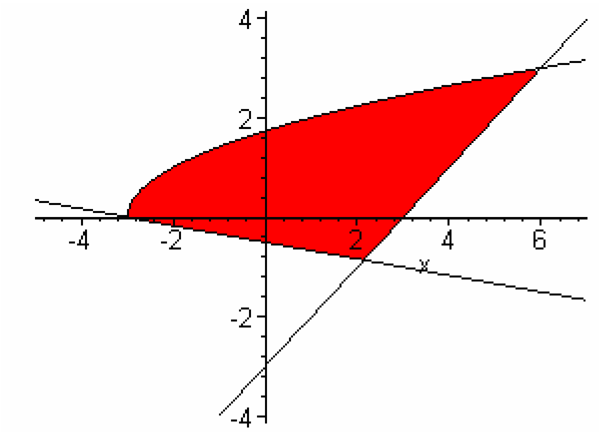
3) Graficar y calcular el área de la región del plano limitada por las curvas cuyas ecuaciones se indican a continuación.

a) $f(x)=x^2-x-2$ y $g(x)=-5x^2+5x+10$

b) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=-x+6$ y $h(x)=1$

c) $f(x)=x^2+2$, $g(x)=x+8$ y $h(x)=-\frac{3}{2}x+9$

4) Calcular el área encerrada por las curvas $y=\sqrt{x+3}$, $y=x-3$ e $y=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}$



Para reflexionar…

El progreso de las ideas no se da en el tiempo a través de una trayectoria perfectamente delineada y preconcebida; existen muchos elementos que en la construcción son desechados, reformulados o agregados. Las concepciones filosóficas sobre la realidad, el papel de la ciencia, y en especial las concepciones sobre las características que debe reunir el conocimiento matemático para ser considerado como conocimiento científico, determinaron los enfoques realizados en cada época. El impacto que tuvieron los personajes y las contribuciones consignadas en la historia difícilmente puede ser comprendida cabalmente si estas consideraciones no se toman en cuenta.