



Integral indefinida

Integración por sustitución

El papel de la sustitución en la integración es comparable al de la regla de la cadena en la derivación. Recordemos que para las funciones derivables dadas por $y = F(u)$ y $u = g(x)$ la regla de la cadena establece que:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'[g(x)] \cdot g'(x)$$

De la definición de primitiva se sigue que:

$$\int F'[g(x)] \cdot g'(x) \cdot dx = F[g(x)] + C = F(u) + C$$

Estrategia para integrar por sustitución

a) Elegir una u , dígase $u = g(x)$.

b) Calcular $\frac{du}{dx} = g'(x)$.

c) Hacer la sustitución, $u = g(x)$ y $du = g'(x) \cdot dx$. En esta etapa toda la integral debe estar en función de u ; no debe quedar x . Si no es este el caso, intentar una elección diferente de u .

d) Evaluar la integral resultante.

e) Reemplazar u por $g(x)$, para que la respuesta final esté en función de x .

Ejemplo: $\int (x^2 + 1)^4 \cdot 2x \cdot dx$

Si se hace $u = x^2 + 1$, entonces $\frac{du}{dx} = 2x$, de modo que $du = 2x \cdot dx$. Por lo tanto,

$$\int (x^2 + 1)^4 \cdot 2x \cdot dx = \int u^4 \cdot du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + C$$

Resolver las siguientes integrales por sustitución

1) $\int 3 \cdot \text{sen}(2x) \cdot dx =$

2) $\int (x^2 - x)^4 \cdot (2x - 1) \cdot dx =$

3) $\int -4x \cdot \sqrt{1 - 2x^2} \cdot dx =$

4) $\int \frac{x + 2}{2 \cdot \sqrt{x + 2}} \cdot dx =$



5) $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} \cdot dx =$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} =$

7) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}} dx =$

8) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx =$

9) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} dx =$

10) $\int x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx =$

11) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}} dx =$

12) $\int \cot g\left(\frac{x}{5}\right) \cdot \text{cosec}\left(\frac{x}{5}\right) \cdot dx =$

13) $\int \frac{dx}{\text{sen}^2(2x)} =$

14) $\int \frac{\ln^2 x - \ln x + 6}{x} \cdot dx =$

15) $\int \frac{\text{tg}(3x+1)-2}{\cos^2(3x+1)} \cdot dx =$

16) $\int \frac{(e^{4x} + e^{2x} + 2) e^x}{2} \cdot dx =$

Integración por partes

En esta sección se desarrolla una técnica que será de utilidad en la evaluación de una amplia variedad de integrales que no se ajustan a ninguna de las fórmulas básicas de integración.

Si f y g son funciones derivables, entonces por la regla de derivación de productos:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Al integrar ambos miembros se obtiene:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx$$

o bien:

$$f(x) \cdot g(x) + C = \int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx$$

es decir:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx + C$$

Puesto que la integral de la derecha producirá otra constante de integración, no hay necesidad de conservar la C de esta última ecuación; por lo tanto se obtiene:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx \quad (1)$$



a la que se llama la fórmula de integración por partes. Al usar esta fórmula en ocasiones se reduce un problema de integración complicado en uno más sencillo.

En la práctica es común volver a escribir (1) haciendo:

$$\begin{aligned} u &= f(x) & du &= f'(x) \cdot dx \\ v &= g(x) & dv &= g'(x) \cdot dx \end{aligned}$$

Esto da por resultado la siguiente fórmula:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Ejemplo: $\int \underbrace{x}_{\tilde{u}} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\tilde{dv}} dx$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{2x} dx \Rightarrow \int dv = v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Resolver las siguientes integrales aplicando la fórmula de integración por partes

17) $\int x \cdot \ln(x) \cdot dx =$

18) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx =$

19) $\int x \cdot \cos(x) \cdot dx =$

20) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \cdot dx =$

21) $\int e^x \cdot \text{sen}(x) \cdot dx =$

22) $\int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx =$

23) $\int \text{arctg}(x) \cdot dx =$

24) $\int (6x - 5) \cdot \text{sen}(-x + 3) \cdot dx =$

25) $\int (2x + 4) \cdot e^{2x+1} \cdot dx =$

26) $\int \frac{x}{\text{sen}^2(x)} \cdot dx =$

27) $\int (4x^2 + 3x) \cdot \cos(x) \cdot dx =$

28) $\int \ln^2(x) \cdot dx =$

29) $\int x \cdot \text{sen}(3x + 1) \cdot dx =$

30) $\int \ln(1 + x^2) \cdot dx =$

31) $\int x \cdot \sec^2(x) \cdot dx =$

32) $\int x \cdot (-4x + 2) \cdot e^{3x} \cdot dx =$

33) $\int 6x \cdot \ln^2(3x) \cdot dx =$