



Integral indefinida

Integración por partes

En esta sección se desarrolla una técnica que será de utilidad en la evaluación de una amplia variedad de integrales que no se ajustan a ninguna de las fórmulas básicas de integración.

Si f y g son funciones derivables, entonces por la regla de derivación de productos:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Al integrar ambos miembros se obtiene:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx$$

o bien:

$$f(x) \cdot g(x) + C = \int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx$$

es decir:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx + C$$

Puesto que la integral de la derecha producirá otra constante de integración, no hay necesidad de conservar la C de esta última ecuación; por lo tanto se obtiene:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx \quad (1)$$

a la que se llama la fórmula de integración por partes. Al usar esta fórmula en ocasiones se reduce un problema de integración complicado en uno más sencillo.

En la práctica es común volver a escribir (1) haciendo:

$$\begin{aligned} u &= f(x) & du &= f'(x) \cdot dx \\ v &= g(x) & dv &= g'(x) \cdot dx \end{aligned}$$

Esto da por resultado la siguiente fórmula:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Ejemplo: $\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x} dx}_{dv}$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{2x} dx \Rightarrow \int dv = v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$



$$\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Resolver las siguientes integrales aplicando la fórmula de integración por partes

1) $\int x \cdot \ln(x) \cdot dx =$

2) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx =$

3) $\int x \cdot \cos(x) \cdot dx =$

4) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \cdot dx =$

5) $\int e^x \cdot \text{sen}(x) \cdot dx =$

6) $\int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx =$

7) $\int \arctg(x) \cdot dx =$

8) $\int (6x - 5) \cdot \text{sen}(-x + 3) \cdot dx =$

9) $\int (2x + 4) \cdot e^{2x+1} \cdot dx =$

10) $\int \frac{x}{\text{sen}^2(x)} \cdot dx =$

11) $\int (4x^2 + 3x) \cdot \cos(x) \cdot dx =$

12) $\int \ln^2(x) \cdot dx =$

13) $\int x \cdot \text{sen}(3x + 1) \cdot dx =$

14) $\int \ln(1 + x^2) \cdot dx =$

15) $\int x \cdot \sec^2(x) \cdot dx =$

16) $\int x \cdot (-4x + 2) \cdot e^{3x} \cdot dx =$

17) $\int 6x \cdot \ln^2(3x) \cdot dx =$

Integración de funciones racionales

Se trata de resolver integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx$ en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Pueden presentar tres casos:

- 1) El grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador.
- 2) El grado del polinomio del numerador es igual que el grado del polinomio del denominador.
- 3) El grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador.



Los tres casos se reducen al 3) ya que si recordamos las propiedades del cociente:

$$\begin{array}{l} P(x) \mid Q(x) \\ R(x) \quad C(x) \end{array}$$
$$\Rightarrow P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx = \int C(x) \cdot dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} \cdot dx}$$

donde la integral de $C(x)$ es inmediata y $R(x)$ es un polinomio de menor grado que $Q(x)$ y por lo tanto estamos en el tercer caso.

Ejemplo:

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 6x + 2}{x-1} \cdot dx = \int (x^2 - 4x + 2) \cdot dx + \int \frac{4}{x-1} \cdot dx = \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + 4 \cdot \text{Ln}|x-1| + C$$

Resolver las siguientes integrales indefinidas

18) $\int \frac{x^6 + 3x^5 - 3x^3 - 7x^2 + 5x - 5}{x+3} \cdot dx =$

19) $\int \frac{x^8 - 2x^6 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 8}{x^2 + 1} \cdot dx =$

Para resolver el 3^{er} caso debemos factorizar el denominador y puede ocurrir:

a) **Que el denominador tenga raíces reales simples:**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} = \frac{A \cdot (x-x_2) + B \cdot (x-x_1)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}$$

Si igualamos $P(x) = A \cdot (x-x_2) + B \cdot (x-x_1)$, se calcula A y B comparando coeficientes o dándole valores a la x.

Al final tendremos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx = \int \frac{A}{(x-x_1)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} \cdot dx = A \cdot \text{Ln}|x-x_1| + B \cdot \text{Ln}|x-x_2| + C$$

Ejemplo: $\int \frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \cdot dx =$



$$\begin{aligned}\frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2} &= \frac{-x^2 + 7x + 9}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \\ &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$-x^2 + 7x + 9 = A(x-1)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-1)$$

Para hallar A , hacemos $x \rightarrow -1$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}-1 - 7 + 9 &= A(-1-1)(-1+2) + B(-1+1)(-1+2) + C(-1+1)(-1-1) \\ 1 &= A \cdot (-2) \\ -\frac{1}{2} &= A\end{aligned}$$

Para hallar B hacemos $x \rightarrow 1$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}-1 + 7 + 9 &= A(1-1)(1+2) + B(1+1)(1+2) + C(1+1)(1-1) \\ 15 &= 6 \cdot B \\ \frac{5}{2} &= B\end{aligned}$$

Para hallar C hacemos $x \rightarrow -2$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}-4 - 14 + 9 &= A(-2-1)(-2+2) + B(-2+1)(-2+2) + C(-2+1)(-2-1) \\ -9 &= 3 \cdot C \\ -3 &= C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Con lo que queda: } \int \frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \cdot dx &= \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \cdot dx + \int \frac{\frac{5}{2}}{x-1} \cdot dx + \int \frac{-3}{x+2} \cdot dx = \\ &= -\frac{1}{2} \text{Ln}|x+1| + \frac{5}{2} \cdot \text{Ln}|x-1| - 3 \cdot \text{Ln}|x+2| + C\end{aligned}$$

Resolver las siguientes integrales indefinidas

20) $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 - 15x} \cdot dx =$

21) $\int \frac{2x^2 - 3x + 6}{3x^3 + 15x^2 + 6x - 24} \cdot dx =$



$$22) \int \frac{-x^3 + 6x + 1}{2x^4 + 8x^3 - 14x^2 - 44x + 48} \cdot dx =$$

$$23) \int \frac{x^2 + 3}{-x^5 - 3x^4 + 11x^3 + 3x^2 - 10x} \cdot dx =$$

b) Que el denominador tenga raíces reales múltiples:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2)^3} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \frac{D}{(x-x_2)^3} = \\ &= \frac{A \cdot (x-x_2)^3 + B \cdot (x-x_1)(x-x_2)^2 + C \cdot (x-x_1)(x-x_2) + D \cdot (x-x_1)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2)^3} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(x) = A \cdot (x-x_2)^3 + B \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)^2 + C \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) + D \cdot (x-x_1)$$

Calculamos los coeficientes A, B, C y D y luego resolvemos la integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx &= \int \frac{A}{(x-x_1)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} \cdot dx + \int \frac{C}{(x-x_2)^2} \cdot dx + \int \frac{D}{(x-x_2)^3} \cdot dx = \\ &= A \cdot \text{Ln}|x-x_1| + B \cdot \text{Ln}|x-x_2| + C \frac{(x-x_2)^{-2+1}}{-2+1} + D \frac{(x-x_2)^{-3+1}}{-3+1} \\ &= A \cdot \text{Ln}|x-x_1| + B \cdot \text{Ln}|x-x_2| - C \frac{1}{(x-x_2)} - D \frac{1}{2 \cdot (x-x_2)^2} \end{aligned}$$

Ejemplo: $\int \frac{3x+12}{(x-2) \cdot (x+1)^2} \cdot dx =$

$$\frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A \cdot (x+1)^2 + B \cdot (x-2) \cdot (x+1) + C \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x+1)^2}$$

Por lo tanto:

$$3x+12 = A \cdot (x+1)^2 + B \cdot (x-2) \cdot (x+1) + C \cdot (x-2)$$

Para hallar A, hacemos $x \rightarrow 2$. Esto elimina los términos en B y C, obteniéndose:

$$18 = 9A + 0 + 0$$

$$2 = A$$

Para calcular C, hacemos $x \rightarrow -1$. Esto elimina los términos en A y B, dándonos:

$$9 = 0 + 0 - 3C$$

$$-3 = C$$



Para hallar el valor de B tomamos cualquier otro valor de x junto con los valores que ya disponemos para A y C . Luego, $x = 1$, $A = 2$ y $C = -3$:

$$15 = 2(2)^2 + B(-2) + 3$$
$$-2 = B$$

De esta manera:

$$\int \frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2} \cdot dx = \int \frac{2}{x-2} \cdot dx + \int \frac{-2}{x+1} \cdot dx + \int \frac{-3}{(x+1)^2} \cdot dx =$$
$$= 2 \cdot \text{Ln}|x-2| - 2 \cdot \text{Ln}|x+1| - 3 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = 2 \cdot \text{Ln}|x-2| - 2 \cdot \text{Ln}|x+1| + 3 \frac{1}{(x+1)} + C$$

Resolver las siguientes integrales indefinidas

- 24) $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} \cdot dx =$
- 25) $\int \frac{3x^2 + 6x - 8}{2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 24x - 16} \cdot dx =$
- 26) $\int \frac{x^3 + x^2 - 2x + 6}{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9} \cdot dx =$
- 27) $\int \frac{x+3}{-x^6 + 4x^5 + 4x^4 - 22x^3 - 3x^2 + 18x} \cdot dx =$
- 28) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36} \cdot dx =$

c) Que el denominador tenga raíces complejas sencillas:

Si al intentar resolver una ecuación de 2º grado obtenemos raíces complejas procedemos de la forma que se muestra a continuación.

El denominador complejo debemos expresarlo de la forma $(x-a)^2 + b$ y resolver la integral de la siguiente forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx = \int \frac{Ax + B}{(x-a)^2 + b} \cdot dx$$

Ejemplo: $\int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 4} \cdot dx =$

$x^2 + 2x + 4$ no tiene raíces reales, por lo tanto para llevarlo a la forma canónica debemos completar el trinomio.



$$x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2x + 1) - 1 + 4 = (x + 1)^2 + 3$$

$$\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 4} \cdot dx = \int \frac{Ax + B}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx \text{ en este caso se ve directamente que } A = 1 \text{ y } B = 3.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 3}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx &= \int \frac{x}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx + \int \frac{3}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx + \int \frac{3}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx + \int \frac{3}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx + \int \frac{-1}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx + \int \frac{3}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx + \int \frac{2}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{Ln} |(x + 1)^2 + 3| + \int \frac{2}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx \end{aligned}$$

Esta última integral se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(x + 1)^2 + 3} \cdot dx &= \int \frac{\frac{2}{3}}{\frac{(x + 1)^2}{3} + \frac{3}{3}} \cdot dx = \int \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \cdot dx = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \text{arctg} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Luego la solución final es $\frac{1}{2} \cdot \text{Ln} |(x + 1)^2 + 3| + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \text{arctg} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}} \right) + C$