Integral indefinida

Integración por partes

En esta sección se desarrolla una técnica que será de utilidad en la evaluación de una amplia variedad de integrales que no se ajustan a ninguna de las fórmulas básicas de integración.

Si f y g son funciones derivables, entonces por la regla de derivación de productos:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$$

Al integrar ambos miembros se obtiene:

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]\cdot dx = \int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx + \int g(x)\cdot f'(x)\cdot dx$$

o bien:

$$f(x)\cdot g(x) + C = \int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx + \int g(x)\cdot f'(x)\cdot dx$$

es decir:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)\cdot dx + C$$

Puesto que la integral de la derecha producirá otra constante de integración, no hay necesidad de conservar la C de esta última ecuación; por lo tanto se obtiene:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)\cdot dx \quad (1)$$

a la que se llama la fórmula de integración por partes. Al usar esta fórmula en ocasiones se reduce un problema de integración complicado en uno más sencillo.

En la práctica es común volver a escribir (1) haciendo:

$$u = f(x) \qquad du = f'(x)\cdot dx$$
$$v = g(x) \qquad dv = g'(x)\cdot dx$$

Esto da por resultado la siguiente fórmula:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Ejemplo: $\int \underbrace{x}_{u}\cdot \underbrace{e^{2x}dx}_{dv}$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{2x}\,dx \Rightarrow \int dv = v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int x\cdot e^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

Resolver las siguientes integrales aplicando la fórmula de integración por partes

1) $\int x\cdot\ln(x)\cdot dx=$

2) $\int x^2\cdot e^x\cdot dx=$

3) $\int x\cdot\cos(x)\cdot dx=$

4) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\cdot dx=$

5) $\int e^x\cdot sen(x)\cdot dx=$

6) $\int x^2\cdot e^{-x}\cdot dx=$

7) $\int arctg(x)\cdot dx=$

8) $\int (6x-5)\ sen(-x+3)\ \cdot dx=$

9) $\int (2x+4)\cdot e^{2x+4}\cdot dx=$

10) $\int \frac{x}{sen^2(x)}\cdot dx=$

11) $\int (4x^2+3x)\cdot\cos(x)\cdot dx=$

12) $\int \ln^2(x)\cdot dx=$

13) $\int x\cdot sen(3x+1)\cdot dx=$

14) $\int \ln(1+x^2)\cdot dx=$

15) $\int x\cdot\sec^2(x)\cdot dx=$

Integración de potencias de seno y coseno

Las integrales de la forma:

$$\int sen^m(x)\cdot\cos^n(x)\cdot dx$$

donde *m* y *n* son números enteros no negativos se evalúan de varias maneras, dependiendo de los valores de *m* y *n*.

Ejemplo 1

Demostrar que:

$$\int sen^2(x)\cdot dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot sen(2x) + C$$

$$\int \cos^2(x)\cdot dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot sen(2x) + C$$

Aplicando las identidades trigonométricas $sen^2(x) = \frac{1}{2}\cdot[1-\cos(2x)]$ y $\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cdot[1+\cos(2x)]$, se obtiene:

$$\int sen^2(x)\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int[1-\cos(2x)]\cdot dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen(2x) + C$$

$$\int \cos^2(x)\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int[1+\cos(2x)]\cdot dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen(2x) + C$$

Ejemplo 2

Demostrar que:

$$\int sen^3(x)\cdot dx = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cdot\cos^3(x) + C$$

$$\int \cos^3(x)\cdot dx = sen(x) - \frac{1}{3}\cdot sen^3(x) + C$$

Aplicando las identidades trigonométricas $sen^2(x) = 1-\cos^2(x)$ y $\cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$, se obtiene:

$$\int sen^3(x)\cdot dx = \int sen^2(x)\cdot sen(x)\cdot dx = \int[1-\cos^2(x)]\cdot sen(x)\cdot dx = \int sen(x)\cdot dx - \int \cos^2(x)\cdot sen(x)\cdot dx$$

$$= -\cos(x) + \frac{1}{3}\cdot\cos^3(x) + C$$

$$\int \cos^3(x)\cdot dx = \int \cos^2(x)\cdot\cos(x)\cdot dx = \int[1-sen^2(x)]\cdot\cos(x)\cdot dx = \int\cos(x)\cdot dx - \int sen^2(x)\cdot\cos(x)\cdot dx$$

$$= sen(x) - \frac{1}{3}\cdot sen^3(x) + C$$

Si *m* y *n* son ambos enteros positivos, entonces la integral

$$\int sen^m(x)\cdot\cos^n(x)\cdot dx$$

puede evaluarse por cualquiera de los procedimientos descriptos anteriormente, dependiendo de si *m* y *n* son impares o pares.

Los procedimientos se resumen en la siguiente tabla.

Caso	***Procedimiento***	***Identidades relevantes***
n impar	Hacer la sustitución $u = sen(x)$	$\cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$
m impar	Hacer la sustitución $u = \cos(x)$	$sen^2(x) = 1 - \cos^2(x)$
m y ***n*** pares	Usar identidades para reducir las potencias de $sen(x)$ y $\cos(x)$	$sen^2(x) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2x)]$ $\cos^2(x) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2x)]$

<u>Resolver las siguientes integrales indefinidas</u>

16) $\int \cos^4(x) \cdot dx =$

17) $\int sen^4(5x) \cdot dx =$

18) $\int sen^3(-2x) \cdot \cos^2(-2x) \cdot dx =$

19) $\int sen^8(6x) \cdot \cos^3(6x) \cdot dx =$

20) $\int sen^2(3x) \cdot \cos^2(3x) \cdot dx =$

21) $\int sen^4(x) \cdot \cos^5(x) \cdot dx =$

22) $\int 2 \cdot \cos^2(5x) \cdot sen^7(5x) \cdot dx =$

23) $\int 4 \cdot \cos^6(x) \cdot dx =$

24) $\int sen^5(2x) \cdot \cos^8(2x) \cdot dx =$