E.E.T Nº 6

E.C.I Nº 1 - TELECOMUNICACIONES

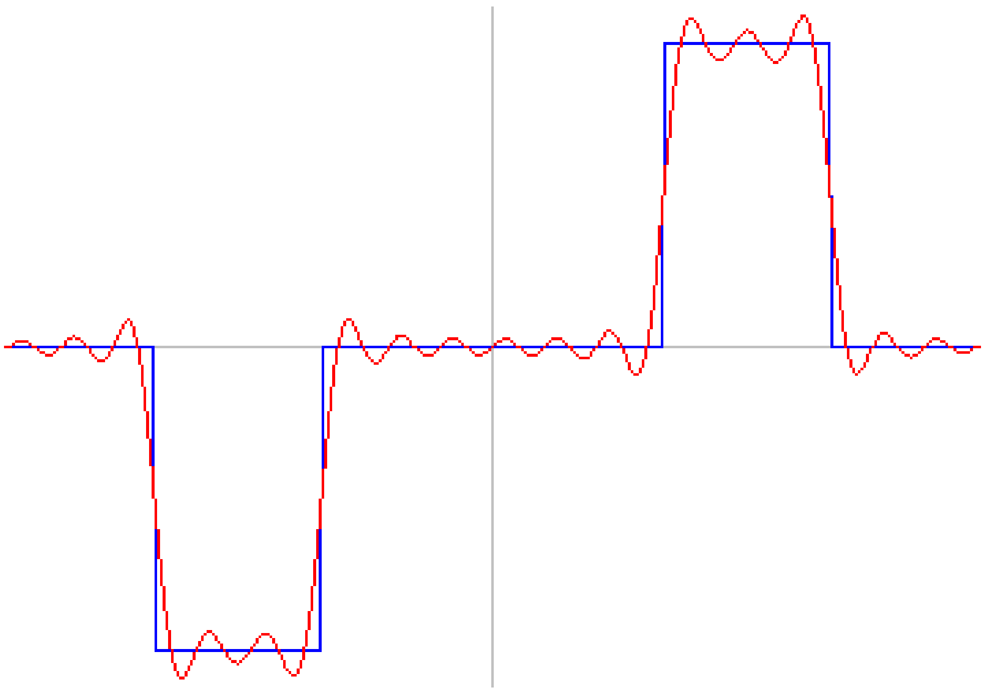
3º AÑO ELECTRÓNICA

SERIES DE FOURIER

AUTOR: Ing. Gianni H. Sparvoli
PUBLICADO EN MARZO DEL 2004

INTRODUCCION

Si no se tiene una noción previa, puede ser complicado comprender el concepto de "representación en frecuencia de una señal". Básicamente la Transformada de Fourier se encarga de transformar una señal del dominio del tiempo, al dominio de la frecuencia, de donde se puede realizar su antitransformada y volver al dominio temporal.
Un ejemplo de representación en frecuencia, puede ser el ecualizador de un equipo de música. Las barritas que suben y bajan, indican las diferentes componentes frecuenciales de la señal sonora que estás escuchando. Esto, lo hace ni más ni menos que un integrado que realiza precisamente la transformada de Fourier de la forma más rápida posible (FFT, o Fast Fourier Transform).
El trabajo con la señal en frecuencia, no solo sirve como información, sino que se puede modificar, de forma que es ampliamente utilizada en filtros, procesado de la imagen y el sonido, comunicaciones (modulaciones, líneas de transmisión, etc.) y otro tipo de aplicaciones más curiosas: estadística, detección de fluctuaciones en los precios, análisis sismográfico, etc.
Tomemos una señal bipolar cuadrada periódica.



Como vemos en el grafico la podemos aproximar mediante sumas de senos y cosenos de distintas frecuencias, todas multiplo de la fundamental. Para poder realizarlo necesito la herramienta matemática que veremos a continuación.

SERIES DE FOURIER

Sea f(t) una función periódica de periodo T, llamaremos SERIE DE FOURIER asociada a f(t) a UNA serie trigonometrica. La serie puede desarrollarse para igualar cualquier función deseada durante cualquier duración finita de tiempo mientras la componente fundamental de la serie pasa por un ciclo completo. Si llamamos t_1 al principio y t_2 al final del período T de la componente fundamental será $t_2 - t_1 = T$ y con ello:

$$\omega T = 2\pi \; ; \quad T = 2\pi/\omega \quad ó \quad \omega = 2\pi/T$$

El método de encontrar los coeficientes, llamado análisis de Fourier, se basa en que las funciones seno y coseno constituyen un sistema ortogonal, esto es el promedio de sus productos en cruz es cero.
Y con esto resulta:

$$SF\, f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n . \cos(n\omega t) + b_n . \operatorname{sen}(n\omega t))$$

con $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ y $n \in Z$

Se define entonces:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\omega t) . d(\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\omega t) . \cos(n\omega t) . d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\omega t) . \operatorname{sen}(n\omega t) . d(\omega t)$$

Casos particulares

Podemos demostrar que hay condiciones de simetría que permiten establecer la existencia o no de determinados términos en la serie, lo que nos ahorra trabajo en el cálculo.

Función impar: f(x) = -f(-x) sólo tienen términos en senos.

$$a_k = \left(\frac{2}{T}\right) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \; dt = \left(\frac{2}{T}\right)\left(\int_{-T/2}^{0} f(t) \cos k\omega_0 t \; dt + \int_{0}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \; dt \right)$$

substituyamos la variable t por -t', o sea t' = -t, y hagamos uso del hecho que f(t) = -f(-t) = -f(t'):

$$a_k = \left(\frac{2}{T}\right)\left(- \int_{-T/2}^{0} f(-t') \cos(-k\omega_0 t') \; dt' + \int_{0}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \; dt \right) =$$

$$a_k = \left(\frac{2}{T}\right)\left(\int_0^{T/2} f(-t')\cos(k\omega_0 t')\,dt' + \int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt\right) = 0$$

y también:

$$b_k = \left(\frac{4}{T}\right)\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt$$

es decir dos veces la integral de la mitad del intervalo.

Función par: f(x) = f(-x) sólo tienen términos en cosenos y la constante.

$$b_k = \left(\frac{2}{T}\right)\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt =$$

$$= \left(\frac{2}{T}\right)\left(\int_{-T/2}^{0} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt\right)$$

substituyamos la variable t por -t', o sea t' = -t, y hagamos uso del hecho que f(t) = f(-t) = f(t'):

$$b_k = \left(\frac{2}{T}\right)\left(-\int_{-T/2}^{0} f(-t')\,\mathrm{sen}\,(-k\omega_0 t')\,dt' + \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt\right) =$$

$$b_k = \left(\frac{2}{T}\right)\left(-\int_0^{T/2} f(t')\,\mathrm{sen}\,(k\omega_0 t')\,dt' + \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt\right) = 0$$

y también:

$$a_k = \left(\frac{4}{T}\right)\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt$$

es decir dos veces la integral de la mitad del intervalo.

Simetría de media onda: en cualquier función periódica es f(t) = f(t + T) y decimos que hay simetría de media onda cuando es f(t) = -f(t - ½T).

$$a_k = \left(\frac{2}{T}\right)\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt = \left(\frac{2}{T}\right)\left(\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt\right) = \left(\frac{2}{T}\right)(I_1 + I_2)$$

Hacemos t' = t + ½T, entonces:

$$I_1 = \int_0^{T/2} f(t' - \tfrac{1}{2}T)\cos k\omega_0(t' - \tfrac{1}{2}T)\,dt =$$

$$I_1 = \int_0^{T/2} - f(t')\left(\cos k\omega_0 t' \cos k\omega_0\,{}^{1t'}\!\tfrac{1}{2}T + \mathrm{sen}\,k\omega_0 t'\,\mathrm{sen}\,k\omega_0\,{}^{1t'}\!\tfrac{1}{2}T\right)dt'$$

$$\omega_0 T = 2\pi \quad \text{luego:} \quad \mathrm{sen}\,k\omega_0 \tfrac{1}{2}T = \mathrm{sen}\,k\pi = 0$$

$$I_1 = -\cos k\pi \int_0^{T/2} f(t')\cos k\omega_0 t'\,dt' =$$

$$I_1 = -\cos k\pi \int_0^{T/2} f(t + \tfrac{1}{2}T)\cos k\omega_0(t + \tfrac{1}{2}T)\,dt =$$

$$= -\cos k\pi \int_0^{T/2} -f(t)\,(-\cos k\omega_0 t)\,dt = -\cos k\pi \int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt$$

Podemos poner ahora que:

$$a_k = \left(\frac{2}{T}\right)(1 - \cos k\pi)\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt$$

Sabiendo que:

$1 - \cos k\pi = 0$ para k = par

$1 - \cos k\pi = 2$ para k = impar

resulta que:

$a_k = 0$ para k = par

$$a_k = \left(\frac{4}{T}\right)\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt \qquad \text{para } k = \text{impar}$$

Haciendo un estudio similar resultará también que:

$b_k = 0$ para k = par

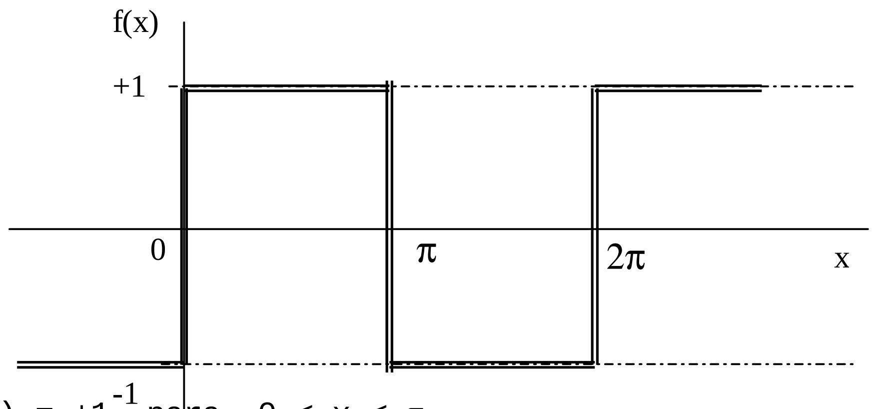
$$b_k = \left(\frac{4}{T}\right)\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\, k\omega_0 t\,dt \qquad \text{para } k = \text{impar}$$

El hecho de ser par o impar nada tiene que ver con las armónicas pares o impares. Además puede hacerse una función par o impar mediante un cambio de ejes.

Vimos entonces que si una onda tiene alguna simetría podemos ahorrar trabajo integrando a través de una parte del ciclo y luego extenderlo al resto. Por ejemplo, si una función es par, o impar, o tiene simetría de media onda, ciertos coeficientes son cero y el cálculo de los restantes puede hacerse integrando de 0 a π y multiplicando el resultado por dos. Más aún, si la onda tiene simetría de media onda y además es par o impar, es suficiente integrar de 0 a 2π y luego multiplicar por cuatro.

Ejemplos

Onda cuadrada.



$f(x) = +1$ para $0 < x < \pi$

$f(x) = -1$ para $\pi < x < 2\pi$

Dada la definición analítica de la función, vemos que requeriremos de dos integrales para evaluarla en todo el período, por ejemplo:

$$b_3 = \left(\tfrac{1}{\pi}\right)\left(\int_0^{\pi}(+1)\ \text{sen}\ 3x\ dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\ \text{sen}\ 3x\ dx\right)$$

$$b_3 = \left(\tfrac{1}{\pi}\right)\left(\int_0^{\pi}\text{sen}\ 3x\ dx - \int_{\pi}^{2\pi}\text{sen}\ 3x\ dx\right) =$$

$$b_3 = \left(\tfrac{1}{\pi}\right)\left(\left[(-1/3)\cos 3x\right]_0^{\pi} + \left[(1/3)\cos 3x\right]_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= (1/\pi)\ \{[(1+1)/3] + [(1+1)/3]\} = 4/3\pi = b_3$$

Generalizando:

$$a_n = \left(\tfrac{1}{\pi}\right)\left(\int_0^{\pi}(+1)\cos nx\ dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\cos nx\ dx\right)$$

$$a_n = (1/n\pi)\left(\left[\text{sen}\ nx\right]_0^{\pi} - \left[\text{sen}\ nx\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = 0$$

Para a_0 resulta ser indeterminada (0/0), por lo que hacemos:

$$a_0 = (1/\pi)\left(\int_0^{\pi}dx - \int_{\pi}^{2\pi}dx\right) = (1/\pi)(\pi - 0 - 2\pi + \pi) = 0$$

por otra parte:

$$b_n = (1/\pi)\left(\int_0^{\pi}(+1)\ \text{sen}\ nx\ dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\ \text{sen}\ nx\ dx\right)$$

$$b_n = (1/n\pi)\left(-\left[\cos nx\right]_0^{\pi} + \left[\cos nx\right]_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= (1/n\pi)(1 - 2\cos n\pi + \cos n2\pi) = b_n$$

que depende si n es par o impar.

Para n par:

$$b_n = (1/n\pi)(1 - 2 + 1) = 0$$

Para n impar:

$$b_n = (1/n\pi)(1 + 2 + 1) = 4/n\pi$$

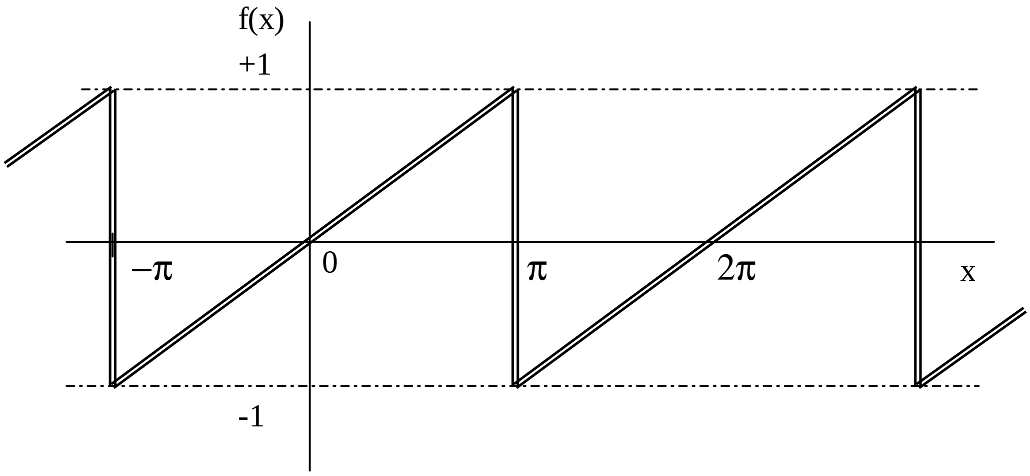
Es decir que sólo tiene componentes impares del seno.

$$f(x) = (4/\pi)\ \text{sen}\ x + (4/3\pi)\ \text{sen}\ 3x + (4/5\pi)\ \text{sen}\ 5x + \ldots$$

$$f(x) = (4/\pi)[\text{sen}\ x + (1/3)\ \text{sen}\ 3x + \ldots + (1/n)\ \text{sen}\ nx]$$

con n impar.

Onda diente de sierra.



$$f(x) = x/\pi \quad (-\pi < x < +\pi)$$

Esta forma de expresarla es más conveniente que hacerlo de 0 a 2π pues requeriría de dos ecuaciones no muy fácilmente integrables. En general podríamos tomar el período de c a $c+2\pi$, pero lo haremos de $-\pi$ a $+\pi$:

$$a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}(x/\pi)\cos nx\,dx = (1/\pi^2)\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx =$$

$$= (1/\pi^2)\left[(1/n^2)\cos nx + (x/n)\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (1/\pi^2)\left[(1/n^2)(\cos n\pi - \cos(-n\pi)) + (1/n)(\pi\operatorname{sen} n\pi - \pi\operatorname{sen} n\pi)\right] = 0$$

$$b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}(x/\pi)\operatorname{sen} nx\,dx = (1/\pi^2)\int_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen} nx\,dx =$$

$$= (1/\pi^2)\left[(1/n^2)\operatorname{sen} nx + (x/n)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (2/\pi^2 n^2)(\operatorname{sen} n\pi - n\pi\cos n\pi) = (2/n\pi)(-\cos n\pi)$$

de donde para n par: $b_n = -2/n\pi$
y para n impar: $b_n = +2/n\pi$
luego para la onda diente de sierra tendremos:

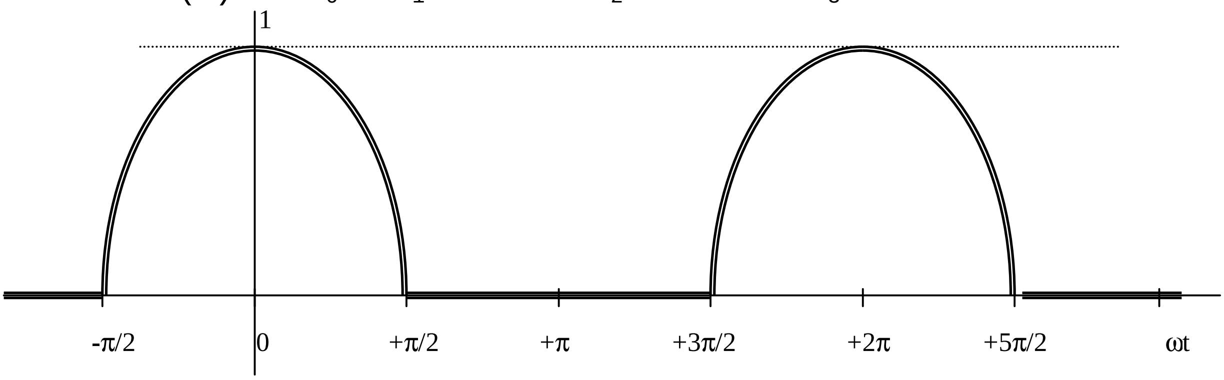
$$\boxed{f(x) = (2/\pi)[\operatorname{sen} x - (1/2)\operatorname{sen} 2x + (1/3)\operatorname{sen} 3x - (1/4)\operatorname{sen} 4x + \ldots]}$$

Onda rectificada.

Tanto la onda cuadrada como la diente de sierra tienen importante uso práctico, otra forma usual se encuentra a la salida de los rectificadores, donde interesa la componente constante (de continua) y todas las armónicas son indeseables.

Partimos de la corriente de salida de un rectificador de media onda y carga resistiva. Localizamos al eje de forma de obtener una función par.
En este caso la serie será de la forma:

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos \omega t + a_2\cos 2\omega t + a_3\cos 3\omega t + \ldots$$



Los coeficientes los hallamos por integración entre los límites $-\pi/2$ y $+\pi/2$, ya que en el resto del período la señal es nula, y en ese intervalo la función es: $\cos \omega t$.
Luego:

$$a_n = (1/\pi)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x)(\cos nx)\,dx$$

si n es distinto de 1:

$$a_n = (1/\pi)\left[(2/(n-1))\,\text{sen}[(n-1)x] + (2/(n+1))\,\text{sen}[(n+1)x]\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$a_n = (1/\pi)\left[(1/(n-1))\,\text{sen}[(n-1)\pi/2] + (1/(n+1))\,\text{sen}[(n+1)\pi/2]\right]$$

substituyendo los valores de n tendremos:

$a_0 = 2/\pi$	$a_1 = 1/2$	$a_2 = 2/3\pi$	$a_3 = 0$
$a_4 = -2/15\pi$	$a_5 = 0$	$a_6 = 2/35\pi$	$a_7 = 0$

con lo que:

$$\boxed{f(t) = (1/\pi)[\,1 + (\pi/2)\cos \omega t + (2/3)\cos 2\omega t - (2/15)\cos 4\omega t + (2/35)\cos 6\omega t - \ldots\,]}$$

la única armónica impar presente es la primera o fundamental.

Espectros en frecuencia.

Puede escribirse una serie de Fourier mediante términos que sólo contengan senos o cosenos, independientemente de que sea o no par o impar, utilizando la relación trigonométrica :

$$a\cos x + b\,\text{sen}\,x = (a^2 + b^2)^{1/2}\cos[x - \text{tg}^{-1}(b/a)]$$

entonces la serie tendrá la forma:

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + c_1\cos(\omega t-\theta_1) + c_2\cos(2\omega t-\theta_2) + \ldots +$$

$$+ c_n\cos(n\omega t-\theta_n) + \ldots$$

donde:

$$c_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \text{ y } \qquad \theta_n = tg^{-1}(b_n/a_n)$$

de otra forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n[\cos(n\omega t - \theta_n)]$$

similarmente podemos hacer:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n[\mathrm{sen}(n\varpi t - \Phi_n)]$$

con:

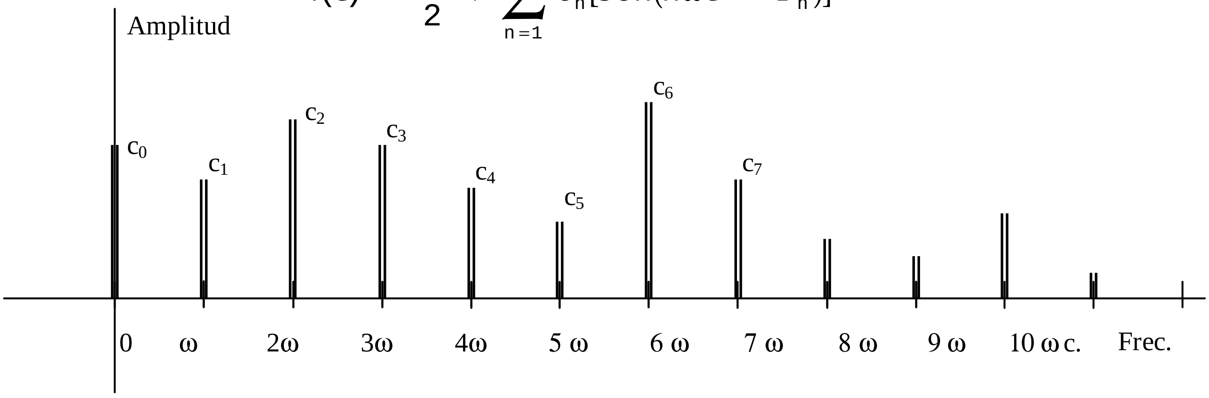
$$c_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \text{ y } \qquad \phi_n = tg^{-1}(a_n/b_n)$$

θ_n y ϕ_n están en grados de la armónica enésima, se miden en la misma escala horizontal que $n\omega$.

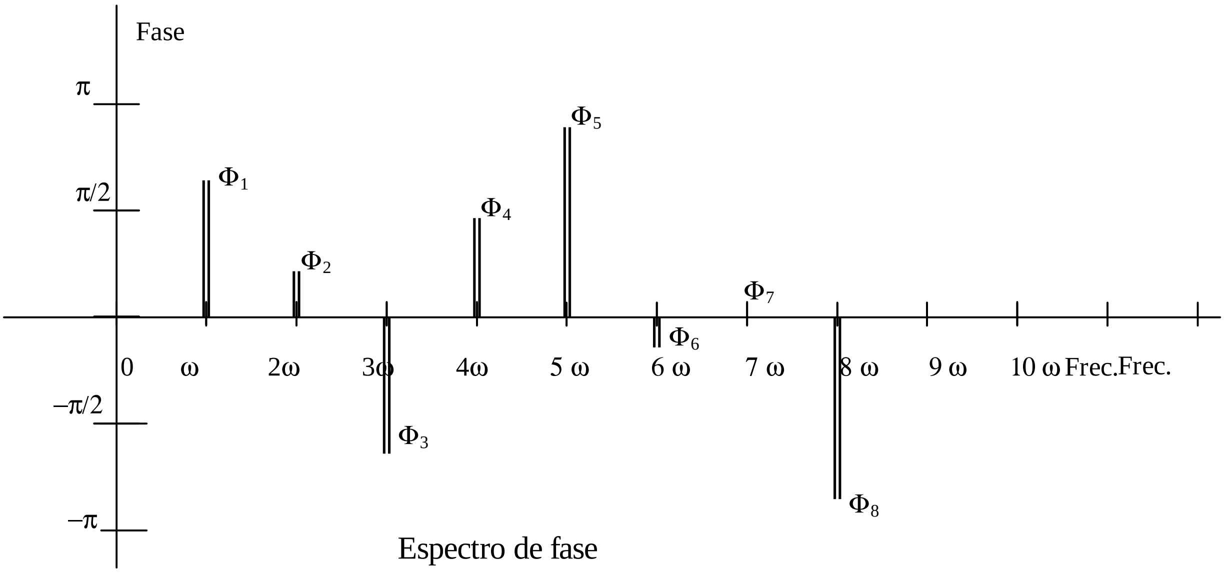
La graficación de este desarrollo en serie no sería muy clara si lo hiciéramos en función del tiempo, pero podemos hacerlo en función de la frecuencia lo que da lugar a representaciones denominadas **Espectros en Frecuencia**.

Como debemos indicar dos datos para cada componente: amplitud y fase, obtenemos los **espectros de Amplitud y de Fase**.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n[\mathrm{sen}(n\omega t - \Phi_n)]$$



Espectro de amplitud



Espectro de fase

En ambos casos tendremos sólo valores para un número entero de veces la frecuencia fundamental, lo que implica un espectro de líneas, discreto, y no una curva continua.
Si la serie está desarrollada en funciones seno y coseno deberíamos pasarla a la forma de solo términos seno o coseno para que pueda ser representada.
Sea:

Valor medio cuadrático y potencia.

El valor RMS (medio cuadrático) de la onda total es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores RMS de sus componentes. Es decir que si:

$$i = I_0 + \hat{I}_1 \cos(\omega t - \theta_1) + \hat{I}_2 \cos(2\omega t - \theta_2) + \ldots$$

$$I_{rms} = (I_0^2 + ½\hat{I}_1^2 + ½\hat{I}_2^2 + ½\hat{I}_3^2 + \ldots)^{1/2}$$

o bien:

$$I_{rms} = (I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots)^{1/2}$$

La demostración (teorema de Parseval) es simple, ya que por definición es:

$$I^2_{rms} = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt$$

y reemplazando i por los términos de la serie obtendremos lo buscado.
La potencia promedio total es, como consecuencia, la suma de las potencias promedio de la componente de corriente continua, de la fundamental y de las armónicas tomadas separadamente.

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots =$$

$$= V_0 I_0 + |V_1||I_1| \cos \phi_1 + |V_2||I_2| \cos \phi_2 + \ldots$$

la demostración también parte de la definición:

$$P = (1/T)\int_0^T v * i \, dt$$

que puede considerarse una generalización de la anterior.
Lo importante es que las componentes tensión y corriente de armónicas diferentes no contribuyen a la potencia activa.

Bibliografía

Tratamiento digital de señales-Prolakis-Manolakis
Apuntes de la cátedra Teoría de circuitos de I –FRM UTN